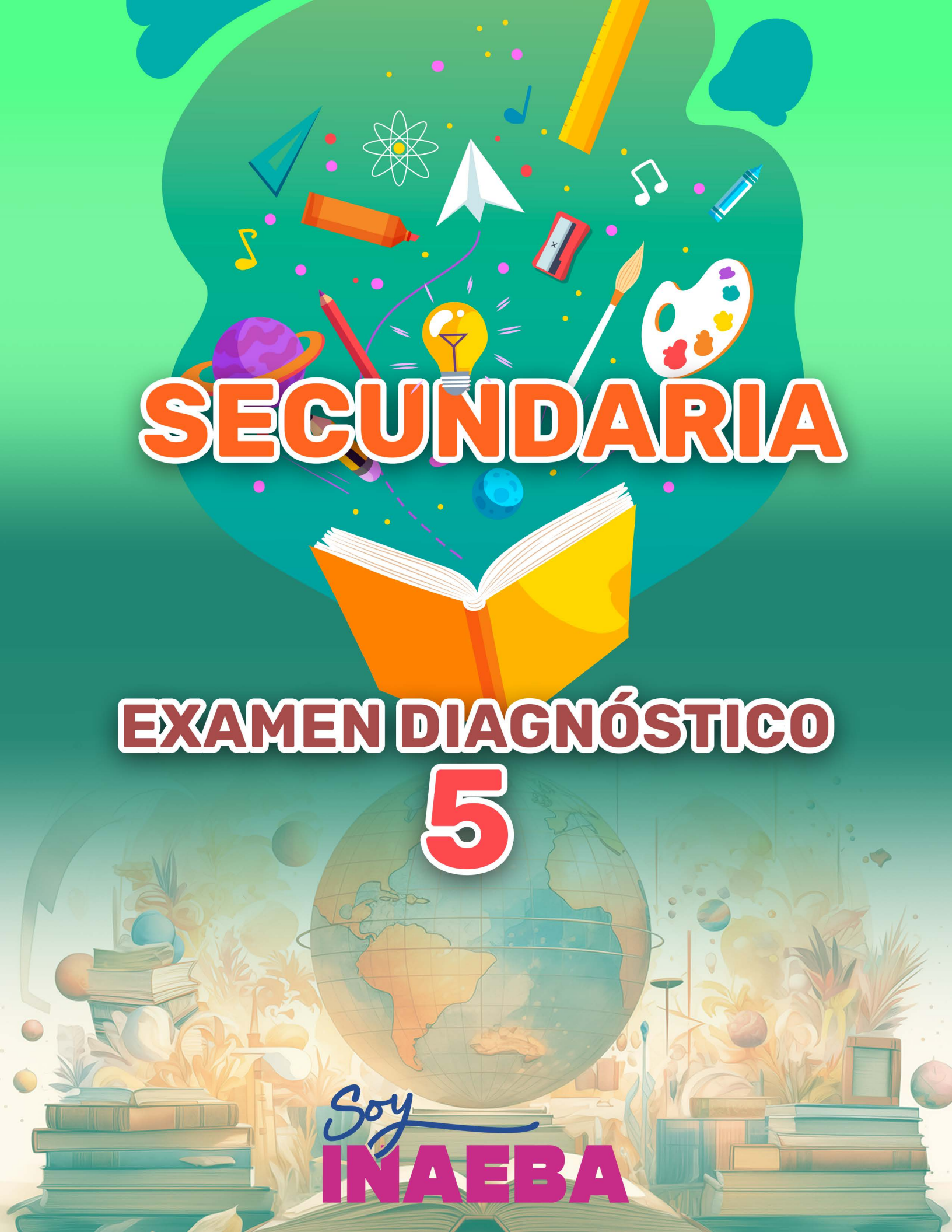




SECUNDARIA

EXAMEN DIAGNÓSTICO

5

Soy
INAEBA

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

3

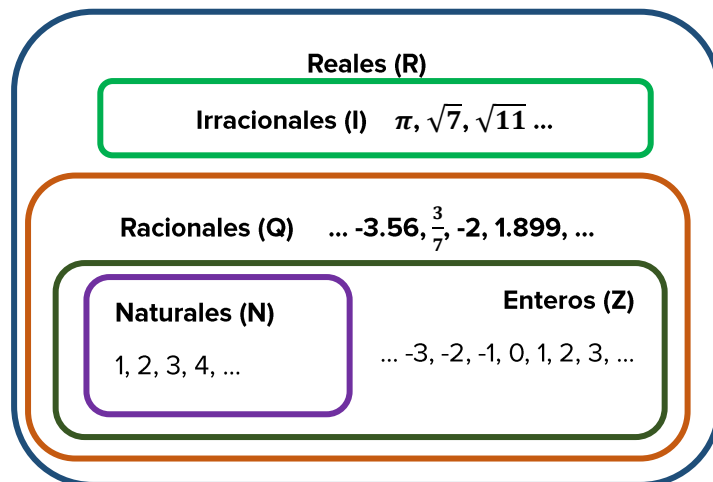


Guía de Pensamiento Matemático 3

Los números reales y sus características

Los **números reales**, estos formados por los

- *números naturales*: son 0, 1, 2, 3, ..., donde los tres puntos significan que son infinitos.
- *números enteros*: son ... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ..., van desde menos infinito hasta más infinito.
- *números racionales*: son por ejemplo $-\frac{1}{2}$, -0.8, 0.569, se incluye los números decimales, son infinitos.
- *números irracionales*: son aquellos que no se pueden expresar como una fracción, por ejemplo, π y $-\pi$ son infinitos.

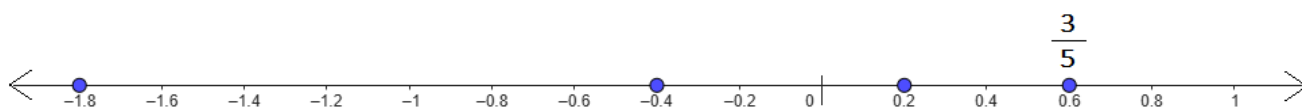


Los números reales pueden ubicarse en la **recta numérica**, la cual es una línea horizontal dividida en partes iguales, en cada una de las cuales se localiza un número, por lo regular entero. En el centro se ubica el número cero, a su izquierda se encuentran los números negativos y a su derecha números positivos.



Las flechas indican que los números siguen sucesivamente hasta menos infinito o más infinito respectivamente. La ubicación de un punto en la **recta numérica** es localizarlo en el lugar que le corresponde a un número de acuerdo con su valor.

Ejemplo: Ubicar los puntos 0.2, -0.4, -1.8 y $\frac{3}{5}$.



El **valor relativo de un número real** cualquiera es aquel que le corresponde de acuerdo con su posición en la recta numérica, en este caso sí se toma en cuenta el signo del número real.

El **valor absoluto de un número real** cualquiera es el mismo valor del número sin tomar en cuenta su signo, siempre es un número positivo, se denota entre dos líneas verticales. Así que $|-2| = 2$ se lee como "valor absoluto de menos 2 igual a 2".

Ejemplos:

Número	Valor relativo	Valor absoluto
24	24	$ 24 = 24$
-125.2	-125.2	$ -125.2 = 125.2$
-0.25	-0.25	$ -0.25 = 0.25$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$ \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

Operaciones con los números reales

Los números reales positivos y negativos pueden sumarse, multiplicarse y dividirse, independientemente del signo que tengan.

La ley de los signos para la suma

Si los números son:

-positivos, se suman y el resultado es positivo, por ejemplo $(+5) + (+3) = +8$.

-negativos, se suman y el resultado es negativo, por ejemplo $(-5) + (-3) = -8$.

-uno positivo y el otro negativo, se resta el de menor valor absoluto al de mayor valor absoluto y al resultado tiene el signo del de mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$(-3) + (+9) = 6$$

$$(+12) + (-25) = -13$$

$$200 + 700 - 500 = 900 - 500 = 400$$

La ley de los signos para la multiplicación y división

En la multiplicación y en la división de los números positivos y negativos, se toma en cuenta que los signos también se multiplican o se dividen entre sí.

$$(+)(+) = +$$

$$(+)(-) = -$$

$$(-)(+) = -$$

$$(-)(-) = +$$

Ejemplos:

$$-14 \div 7 = -2$$

$$(-5)(-3) = 15$$

$$(-7)(12) = -84$$

$$(-120) \div (-6) = 20$$

$$+ \div + = +$$

$$+ \div - = -$$

$$- \div + = -$$

$$- \div - = +$$

Problemas:

1. Amelia tiene \$3800, va a pagar \$400 de la tanda y \$1200 de agua e internet. ¿Le alcanzará a Amelia con este dinero para cubrir estos gastos, o debe conseguir más dinero?

R. Amalia tiene \$3800, por lo tanto, se pondrá positivo. Va a pagar la tanda y los servicios, entonces se pondrán negativos los valores: -\$400, -\$1200. El dinero que le quedará después de pagar será $\$3800 - \$400 - \$1200 = \$3400 - \$1200 = \2200 ; a Amalia sí le alcanzará a pagar.

2. Pedro tenía en su tarjeta de débito \$140, pero el banco le cobró \$200 por administrar su cuenta. ¿Cuánto dinero tiene ahora Pedro en su cuenta tras el cobro del banco?

R. A Pedro se le cobró \$200, entonces se pondrá con signo negativo, luego Pedro tiene $\$140 - \$200 = -\$60$.

3. Un refrigerador estaba en -2 grados centígrados (-2°C) pero bajó su temperatura en 5°C por 3 veces durante el día, ¿cuántos grados centígrados está marcando el termómetro del refrigerador?

R. El termómetro del refrigerador marca $-2 + (3)(-5) = -2 - 15 = -17$, es decir, -17°C.

4. Luisa tiene que ir a otra ciudad durante 5 días y va a pagar \$320 diarios en el hotel donde se hospedará. ¿Cuánto va a pagar en el hotel?

R. Luisa gastará en hospedaje \$320, la cantidad es negativa por ser un costo, para calcular el pago se debe multiplicar $(-320)(5) = -1600$, Luisa pagará \$1600.

Potencias y raíces

Una **potencia** es el producto de un número por sí mismo varias veces. Algunos ejemplos de cómo se leen las potencias son:

- 4^2 , cuatro al cuadrado;
- 5^3 , cinco al cubo;
- 7^4 , siete a la cuarta potencia;
- 3^5 , tres a la quinta potencia.

Ejemplos:

$$3^2 = (3)(3) = 9$$

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$

$$5^4 = (5)(5)(5)(5) = 625$$

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = (9)(-3) = -27$$

Exponente: número que indica cuántas veces se multiplicará.

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

Base: número o factor que se multiplica por sí mismo.

Potencia: producto resultante.

La **potencia de una base negativa**:

- **será positiva** siempre que el exponente sea **par**. $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = (9)(9) = 81$
- **será negativa** si el exponente es **impar**. $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = (9)(9)(-3) = (81)(-3) = -243$

La **raíz cuadrada** es la operación inversa de la potencia.

Generalmente la raíz cuadrada se escribe sin el índice, por ejemplo $\sqrt{16} = 4$.

Ejemplos:

-Ya que $3^2 = 9$, entonces $\sqrt{9} = 3$, se lee raíz cuadrada de nueve es tres.

-Como $12^2 = 144$, luego $\sqrt{144} = 12$, se lee raíz cuadrada de 144 es 12.

Índice: señala las veces que se debe multiplicar por sí misma la raíz para obtener el radicando.

$$\sqrt[2]{25} = 5$$

Raíz: resultado.

Radical: símbolo para expresar la operación.

Radicando: número que está dentro del radical.

Un **cuadrado perfecto** es un número que tiene raíz cuadrada exacta, es decir esta es un número entero, por ejemplo, 169, 81 y 121, ya que $\sqrt{169} = 13$, $\sqrt{81} = 9$ y $\sqrt{121} = 11$.

No todos los números son cuadrados perfectos, por ejemplo 6 no lo es, pues $\sqrt{6} = 2.449489742$.

Problemas:

1. El piso de un salón tiene forma cuadrada, si su lado mide 10 metros, ¿cuál es su área? Si se aumenta 2 metros de cada lado, ¿cuánto aumentaría su área?

R. El área del piso es de $10^2 = (10)(10) = 100$ metros cuadrados. Si se le aumenta 2 metros a cada lado, la medida del lado será 12 metros así que su área será de $12^2 = (12)(12) = 144$ metros cuadrados. La diferencia de áreas es de $144 - 100 = 44$ metros cuadrados.

2. Mario cortó una cartulina en cierto número de partes, después volvió a cortar cada pedazo resultante en el mismo número de veces. Si al final tiene 49 pedazos, ¿en cuántas partes cortó la cartulina cada vez?

R. En las dos veces dividió la cartulina en el mismo número de pedazos, entonces el número buscado tiene la propiedad de que al multiplicarlo por sí mismo el resultado sea 49, como $\sqrt{49} = 7$, la cartulina se partió en 7 pedazos y luego cada pedazo en 7 partes.

Conversiones entre el sistema métrico decimal y el inglés

Las unidades más comunes del sistema métrico decimal para medir el **peso** toman como base los **gramos** y son las siguientes:

Principales unidades para medir el peso y su equivalencia en gramos		
Unidad	Equivalencia en gramos	Símbolo
kilogramo	1 000 g	kg
hectogramo	100 g	hg
decagramo	10g	dag
gramo	1 g	g
decigramo	0.1 g	dg
centigramo	0.01 g	cg
miligramo	0.001 g	mg

Para subir un nivel en la tabla se divide entre 10.

Por ejemplo, para subir de centigramos al nivel de decagramo se divide por $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$.

Para bajar de un nivel en la tabla se multiplica por 10.

Por ejemplo, para bajar de hectogramo al nivel de gramos se multiplica por $10^2 = 10 \times 10 = 100$.

Ejemplos:

1. Si Isabel tiene 300 gramos de arena, ¿cuántos kilogramos de arena tiene?
R. De gramos a kilogramos hay que subir 3 niveles, entonces se divide entre 1000, $300 \div 1000 = 0.3$, de modo que $300\text{ g} = 0.3\text{ kg}$.
2. ¿Cuántos cg equivalen 3 gramos?
R. De gramos a centigramos se bajan dos niveles, entonces se multiplica por 100, $3\text{ g} = 300\text{ cg}$.
3. ¿Cuántos kg equivalen 10 000 g?
R. De gramos a kilogramos se suben tres niveles, entonces se divide entre 1000, $10\,000\text{ g} = 10\text{ kg}$.

Las unidades más comunes en el sistema métrico decimal para medir la **capacidad** son las siguientes

Principales unidades para medir capacidad y su equivalencia en litros		
Unidad	Equivalencia en gramos	Símbolo
kilolitro	1 000 l	kl
hectolitro	100 l	hl
decalitro	10 l	dal
litro	1 l	l
decilitro	0.1 l	dl
centilitro	0.01 l	cl
mililitro	0.001 l	ml

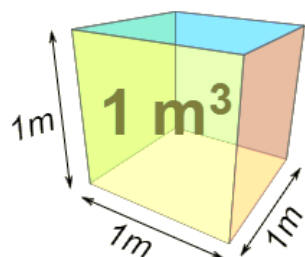
Ejemplos:

1. ¿Cuántos ml equivalen 6 dl?

R. De decilitros a mililitros se bajan dos niveles, entonces se multiplica por 100, 6dl = 600 ml.

2. ¿Cuántos hl equivalen 2 000 l?

R. De litros a hectolitros se suben 2 niveles, entonces se divide entre 100, 2 000 l = 20 hl.



El **volumen** es la cantidad de espacio que ocupa un objeto que tiene alto, largo y ancho, por ejemplo, un ropero, un recipiente, entre otras cosas. La unidad fundamental es el **metro cúbico (m³)**. En ocasiones se necesita conocer cuántos litros caben en un recipiente, la equivalencia más sencilla entre unidades de capacidad y de volumen es:

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$$

Que se lee como: **un decímetro cúbico equivale a un litro.**

Principales unidades para medir el volumen y su equivalencia en metros cúbicos		
Unidad	Equivalencia en metros cúbicos	Símbolo
kilómetro cúbico	1 000 000 000 m³	km³
hectómetro cúbico	1 000 000 m³	hm³
decámetro cúbico	1 000 m³	dam³
metro cúbico	1 m³	m³
decímetro cúbico	0.001 m³	dm³
centímetro cúbico	0.000 001 m³	cm³
milímetro cúbico	0.000 000 001 m³	mm³

Para subir un nivel en la tabla se divide entre 100 y para bajar de un nivel en la tabla se multiplica por 100.

Ejemplo:

a) $4 \text{ dam}^3 = 40 \text{ 000 dm}^3$

b) $30 \text{ mm}^3 = 0.000030 \text{ m}^3$

c) $7 \text{ dm}^3 = 0.0007 \text{ dam}^3$

Algunas medidas del **sistema inglés de longitud** son las siguientes:

Tabla de equivalencias de medidas de longitud entre el sistema inglés y el sistema decimal		
Unidad	Equivalencia en las otras unidades del sistema inglés	Equivalencia en el sistema decimal
pulgada	$\frac{1}{12}$ de pie	2.54 cm
pie	12 pulgadas	30.48 cm
yarda	3 pies	0.944 m

Ejemplos:

a) Dos pulgadas equivalen a un sexto de pie y a 5.08 cm.

b) Cinco pies equivalen a 60 pulgadas y a $(5)(30.48) = 152.40$ cm.

c) Tres yardas equivalen a 9 pies y a 2.832 m.

Medidas del **sistema inglés de capacidad**

Una **onza líquida** (Fl oz) = 29.5735 ml

Un **galón** (Gal) = 3.7854 litros

Medidas del **sistema inglés de peso**

Una **libra (lb)** = 453.592 g

Para hacer las conversiones entre el sistema decimal e inglés se utiliza la regla de tres directa.

Ejemplos:

1. Se tienen unos clavos que miden 2 pulgadas (in) cada uno. ¿Cuántos centímetros miden?

R. Se aplica la regla de tres:

Pulgadas	Centímetros
1	2.54 cm
2	?

$$? = \frac{2 \times 2.54}{1} = 5.08$$

Así que 2 pulgadas equivalen a 5.08 cm.

2. Una carretera mide 400 kilómetros, ¿a cuántas yardas equivale?

R. Primero 0.944 m equivalen a 0.000944 km. Se aplica la regla de tres:

Kilómetros	Yardas
0.000944	1
400	?

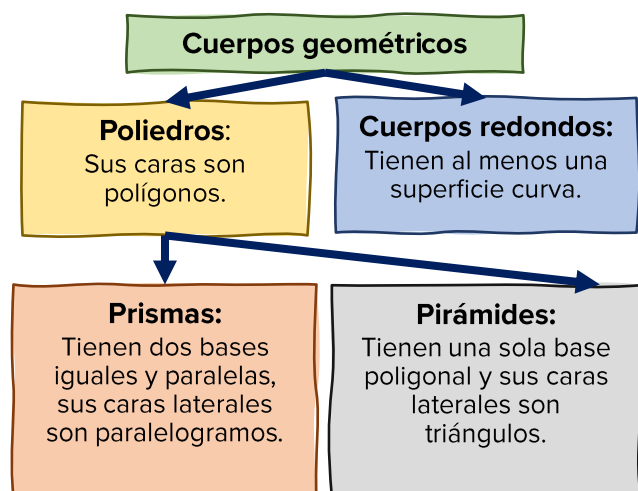
$$? = \frac{400 \times 1}{0.000944} = 423728.8$$

Así que 400 km equivalen a 423 728.08 yardas.

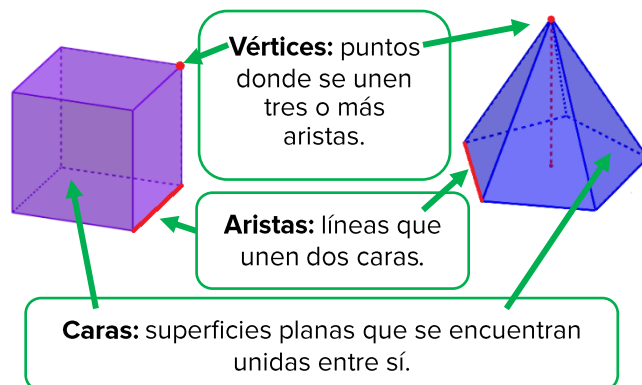
Los cuerpos geométricos, el cubo y prismas de base rectangular

Las **figuras geométricas** tienen largo y alto, es decir, tienen solamente dos dimensiones, ejemplo de ellas son el triángulo, el cuadrado, el círculo, el rectángulo, entre otras.

Los **cuerpos geométricos** tienen tres dimensiones, es decir, largo, alto y ancho, ejemplo de ellos son el cubo, el cilindro, etc.



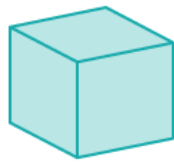
Todos los cuerpos geométricos están conformados por **caras**, **aristas** y **vértices**.



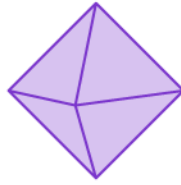
Un **poliedro es regular** cuando todas sus caras son polígonos regulares, solamente hay cinco de ellos:



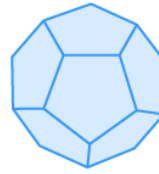
Tetraedro: sus cuatro caras son triángulos equiláteros.



Cubo: sus seis caras son cuadrados.



Octaedro: sus ocho caras son triángulos equiláteros.

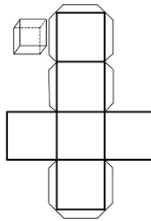


Dodecaedro: las doce caras son pentágonos regulares.

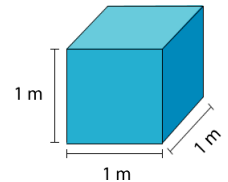


Icosaedro: sus veinte caras son triángulos equiláteros.

Para armar poliedros de papel se necesita un patrón, por ejemplo, para armar un cubo se necesita una como la de la siguiente imagen.



El **volumen** es una magnitud definida como el espacio ocupado por un cuerpo, la unidad más común del sistema métrico decimal para medir el volumen es el **metro cúbico**, que se abrevia m^3 , equivale a un cubo que mide un metro de largo por un metro de ancho y por un metro de alto.



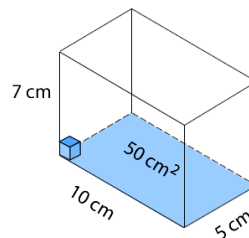
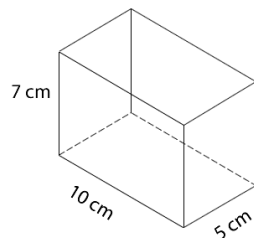
Para calcular el **volumen de un prisma rectangular** se multiplica el largo por el alto y por el ancho.

Ejemplo:

¿Cuál es el volumen de una pecera que mide 7 cm, 10 cm y 5 cm?

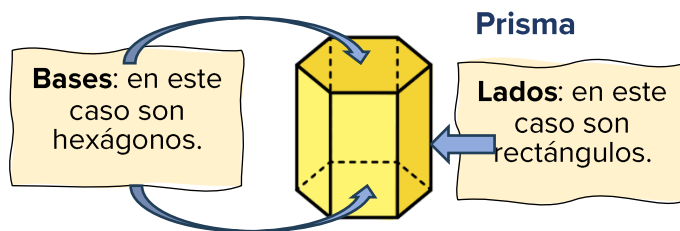
R. El volumen de la pecera es igual a

$$V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto} = 5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} = 50 \text{ cm}^2 \times 7 \text{ cm} = 350 \text{ cm}^3.$$



Prismas y pirámides de base triangular

Como ya vimos los **prismas** tienen dos caras paralelas llamadas bases, estas pueden tener la forma de un polígono regular o irregular, además sus lados son paralelogramos.



Las **pirámides solamente tienen** una base y sus lados se unen en un vértice, que corresponde al punto más alto de la pirámide, sus caras laterales son triángulos.

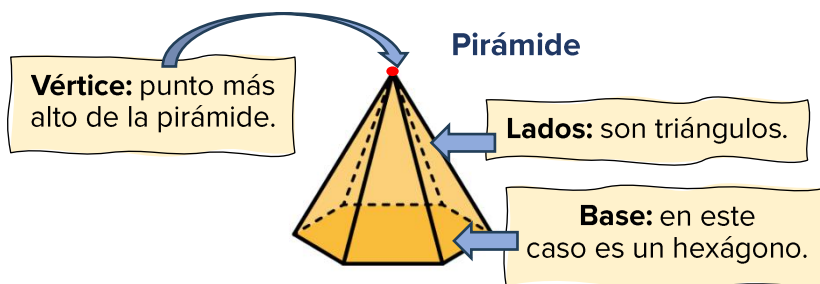
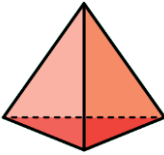
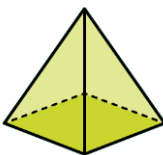
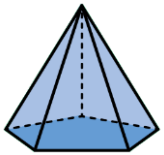
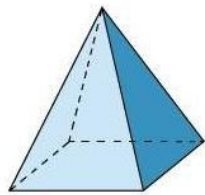
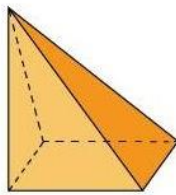


Tabla de características de algunas pirámides

	Pirámide triangular	Pirámide cuadrada	Pirámide pentagonal	Pirámide hexagonal
Forma				
Número de lados de la base	3	4	5	6
Número de aristas	6	8	10	12
Número de vértices	4	5	6	7
Número de caras	4	5	6	7



Pirámide recta

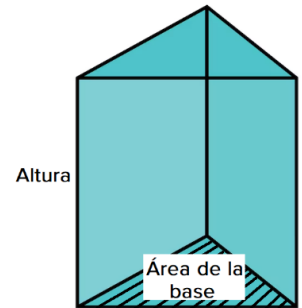


Pirámide oblicua

Una pirámide es **recta** cuando el vértice está exactamente encima del centro de la base, de otro modo se llama pirámides **oblicua**.

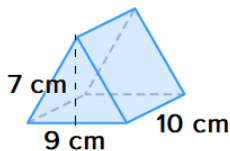
Para calcular el **volumen de un prisma triangular** se obtiene el área de la base y se multiplica por la altura.

Ejemplos:



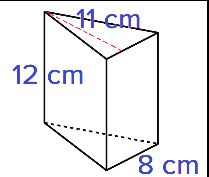
a) ¿Cuál es el volumen del siguiente prisma?

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \text{área de la base} \times \text{altura} \\ &= \frac{\text{base del triángulo} \times \text{altura del triángulo}}{2} \times \text{altura} \\ &= \frac{9 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}}{2} \times 10 \text{ cm} = 31.5 \text{ cm}^2 \times 10 \text{ cm} = 315 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



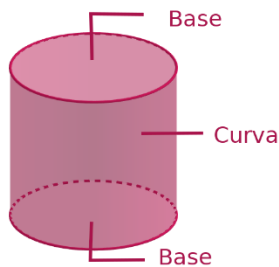
b) Calcula el volumen del siguiente prisma triangular.

$$\begin{aligned} V &= \text{área de la base} \times \text{altura} \\ &= \frac{\text{base del triángulo} \times \text{altura del triángulo}}{2} \times \text{altura} \\ &= \frac{8 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}}{2} \times 12 \text{ cm} = 44 \text{ cm}^2 \times 12 \text{ cm} \\ &= 528 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

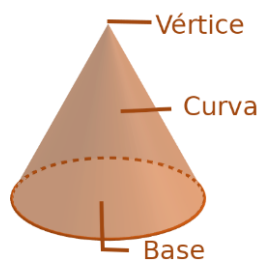


El cilindro

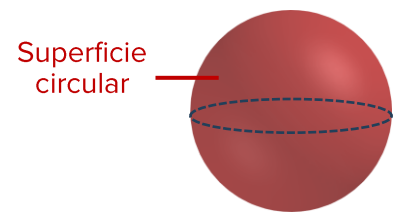
Los **cuerpos redondos** son aquellos que tienen al menos una de sus caras curvas, los más comunes son el cilindro, cono y esfera.



Cilindro: tiene dos caras idénticas y circulares, además una superficie lateral y curva.

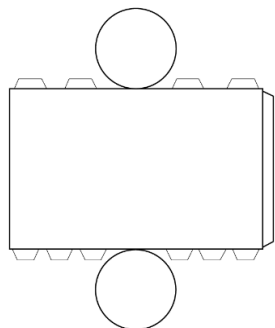


Cono: tiene una base circular y un vértice.



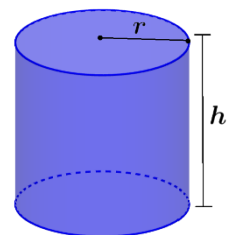
Esfera: tiene una superficie circular.

Estos tres cuerpos redondos pertenecen a una clasificación conocida como **sólidos de revolución**, ya que pueden obtenerse a partir de girar una figura geométrica sobre uno de sus ejes.

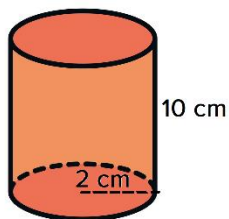


Para armar un cilindro se necesita una **plantilla** que tenga un rectángulo y dos círculos idénticos, como la que se muestra en la izquierda.

En un cilindro las dos bases son circulares e iguales, ambas tienen radio, que se representa por la letra **r**, la altura del cilindro se representa por la letra **h** y mide la distancia entre las dos bases circulares.



El **área de un cilindro** se halla sumando el área de la superficie cilíndrica o área lateral (AL), que es un rectángulo, con las áreas de las dos bases (AB), que son dos círculos idénticos. La fórmula está dada por $\text{área} = 2 \times \pi \times r \times (r + h)$, donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro.



Ejemplo: Andres está armando un cilindro, necesita saber cuántos centímetros cuadrados de papel como mínimo usará si la altura del rectángulo será de 10 cm y el radio del círculo de 2 cm.

R. El área es igual a $2 \times \pi \times 2 \text{ cm} \times (2 \text{ cm} + 10 \text{ cm}) = (2)(3.1416)(2 \text{ cm})(12 \text{ cm}) = 150.7968 \text{ cm}^2$,

Para calcular el **volumen de un cilindro** se obtiene primero el área de una base y después esta se multiplica por la altura (h) del cilindro, **Volumen** = $\pi \times r^2 \times h$, donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro.

Ejemplo: ¿Cuál es el volumen de un cilindro que mide 10 000 metros de altura y un radio de 10 kilómetros?

R. Primero los 10 000 metros se pasan a kilómetros, 10 000 metros = 10 km.

El volumen = $\pi \times r^2 \times h = (3.1416)(10^2)(10) = 3\,141.6 \text{ km}^3$.

Gráficas de barras

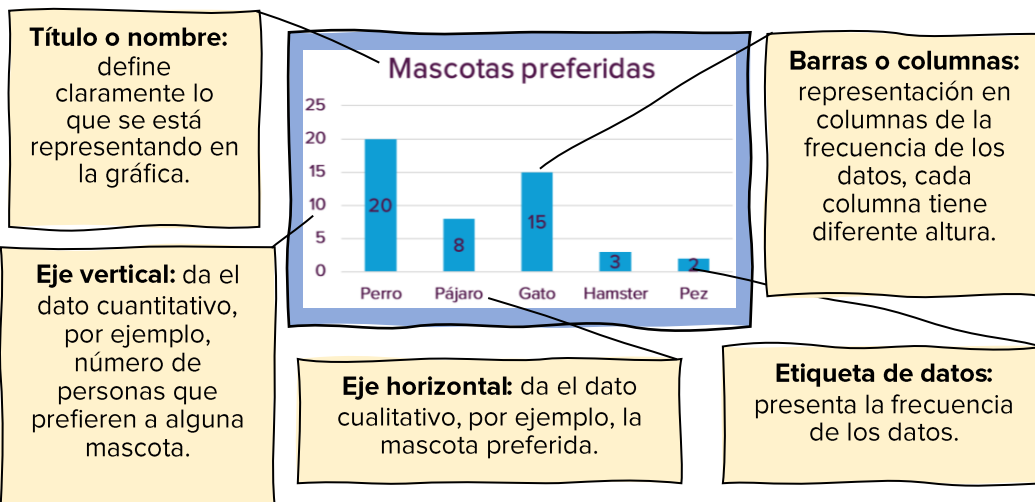
Un **dato** representa el valor numérico (120 m de largo, 4 goles, etc.) o una característica (color azul, mayor de edad, etc.) que se obtiene de una unidad estadística para una variable en particular.

La **frecuencia** es el número total de repeticiones de un dato o de un conjunto de datos de una misma clase. Por ejemplo, en colores preferidos el dato "azul" apareció 10 veces, es decir, la frecuencia de este dato es de 10.

Los datos estadísticos se pueden representar con pictogramas y gráficas con la finalidad de tener una organización y comparación visual de estos, y así analizar la información para comprender las relaciones, patrones y tendencias.

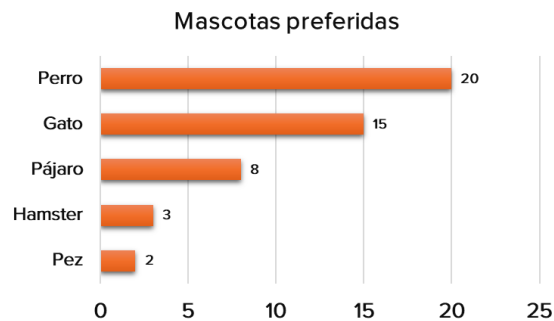
Un **diagrama de barras** refleja los conteos de valores de los niveles de una variable, representa datos mediante columnas o barras con el mismo ancho, pero con distinta altura porque esta depende del valor del dato.

La diferencia de la gráfica circular es



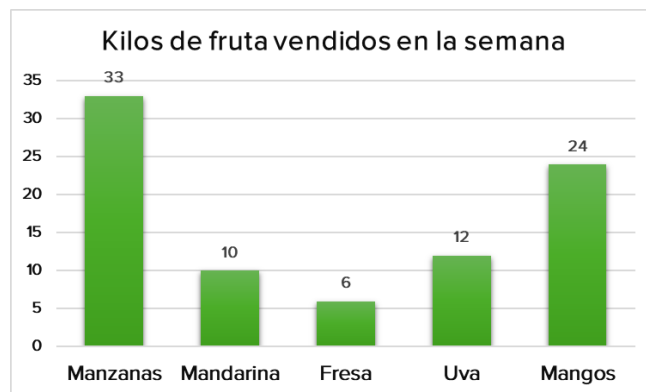
que siempre representa todas las partes de un todo, las gráficas de barras comparan datos de distinto tipo que no necesariamente forman un 100 por ciento. Pueden presentarse de forma horizontal o vertical.

En una **gráfica horizontal** lo que se mostraba en el eje horizontal se presenta en el vertical y lo que se mostraba en el eje vertical ahora se presenta en el eje horizontal. Es decir, los datos cualitativos ahora están en el eje vertical, y los cuantitativos en el horizontal.



Ejemplos:

1. La siguiente gráfica de barras presenta los kilos de frutas que se vendieron en el negocio de Juan.



a) ¿Cuántos kilos de fruta se vendieron en total?

R. Se vendieron $33 + 10 + 6 + 12 + 24 = 85$ kilos de fruta en total.

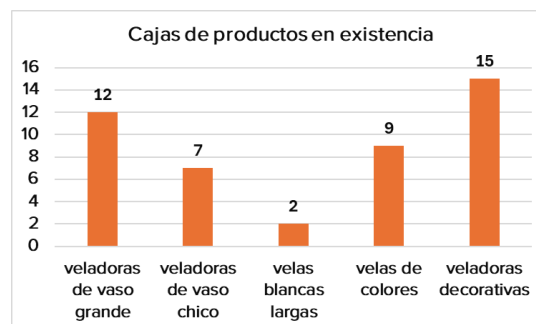
b) ¿Cuál fruta es la que menos se vendió?

R. La fruta que menos se vendió fue la fresa, con 6 kilos en esta semana.

c) ¿Cuál es la fruta que se vendió más?

R. La fruta que más se vendió fue la manzana, con 33 kilos en esta semana.

2. En un negocio están haciendo un inventario de los productos en existencia, tienen los siguientes datos: 12 cajas de veladoras de vaso grande, 7 cajas de veladoras de vaso chico, 2 cajas de velas blancas largas, 9 cajas de velas de colores y 15 cajas de veladoras decorativas. Realiza una gráfica que tenga todos los datos.

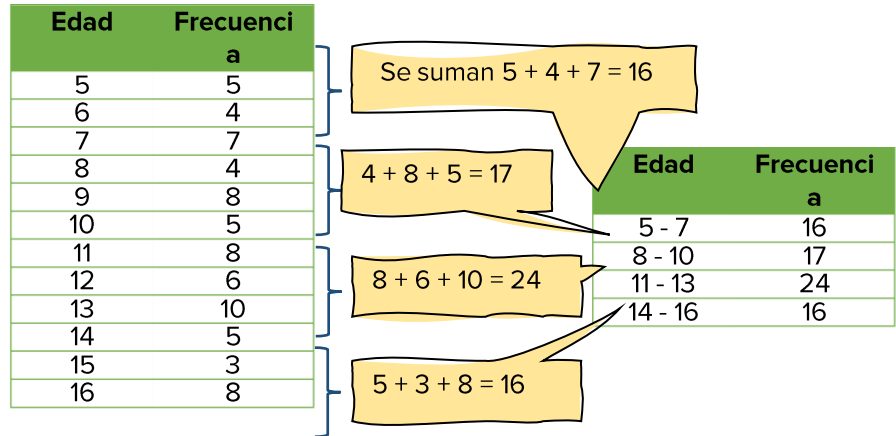


Histogramas

En estadística, los subgrupos ordenados de datos reciben el nombre de **clase** estadística. La clase se forma con **intervalos** de datos, con la condición de que estos intervalos sean de igual tamaño.

El **histograma** es una gráfica que sirve para analizar datos agrupados, sus barras no tienen espacio entre ellas y representan datos agrupados en clases o intervalos.

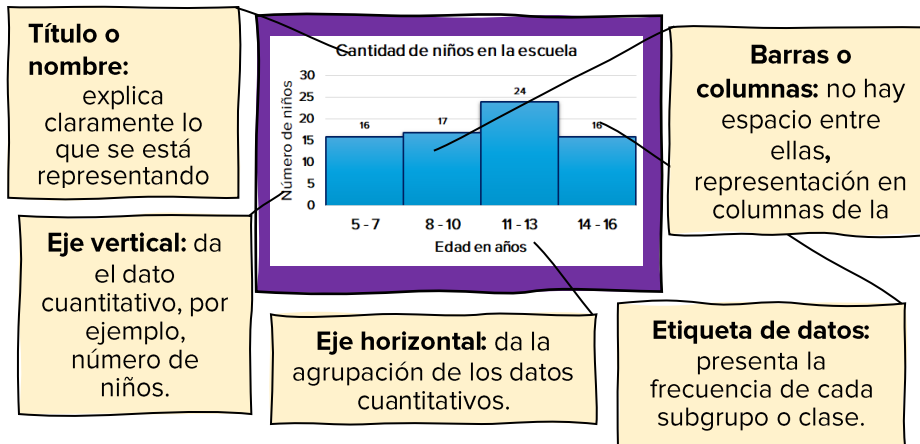
Los datos se agruparon por intervalos de 3 años, entonces va de 5 - 7, 8 - 10, etc.



Las **variables** son una característica o cualidad de los individuos de una población, pueden ser **cualitativas** o **cuantitativas**. Por ejemplo, la edad, estado civil, sexo, el color, la capacidad, entre otras cosas.

Las **variables cualitativas** son las que hacen referencia a cualidades que no pueden ser medidas con números, como un color, un domicilio o estado civil. Las **variables cuantitativas** sí

pueden ser expresadas con números, por ello aceptan hacer operaciones. Ejemplo de ellas son la edad o la temperatura. Estas últimas se dividen en **discretas** o **continuas**, las discretas no pueden tomar ningún valor entre dos números enteros porque perderían sentido, por ejemplo, la cantidad de habitantes, de mesas, etc. las



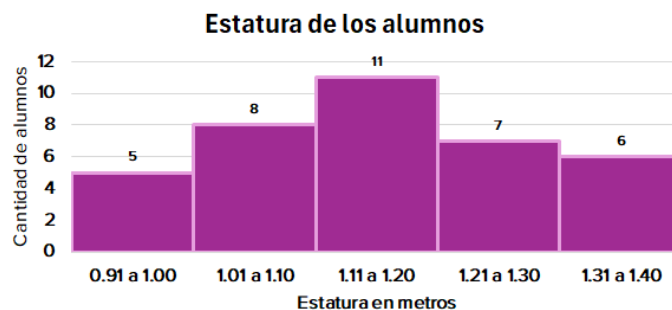
variables continuas si pueden tomar valores decimales, por ejemplo, la temperatura, la estatura, porcentajes, entre otras cosas.

Un histograma permite representar gráficamente variables cuantitativas discretas y continuas que tienen una gran cantidad de datos y que mediante su agrupación en clases estadísticas o subgrupos presentan información que permite visualizar la acumulación, tendencia, variabilidad, dispersión y distribución de los datos estadísticos con que se cuenta.

Ejemplo: Ernesto tomó la estatura de sus alumnos para valorar su crecimiento adecuado a su edad, anotó los datos en metros, pero para su mejor manejo los acomodó de menor a mayor: 0.93, 0.95, 0.96, 0.96, 1.00, 1.03, 1.04, 1.05, 1.06, 1.06, 1.07, 1.08, 1.08, 1.13, 1.13, 1.14, 1.14, 1.15, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.18, 1.19, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28, 1.28, 1.29, 1.34, 1.35, 1.35, 1.37, 1.37 y 1.40.

A Los datos los organizó en clases o subgrupos con diferencia de 10 centímetros, obtuvo una tabla y de ahí generó el histograma.

Estatura en metros	Cantidad de alumnos
0.91 a 1.00	5
1.01 a 1.10	8
1.11 a 1.20	11
1.21 a 1.30	7
1.31 a 1.40	6
Total	37



Ernesto al observar el histograma se dio cuenta de varias cosas:

- La mayoría de los alumnos miden de 1.11 a 1.20 m.
- La tendencia se va concentrando hacia la estatura de 1.11 a 1.20 m, las columnas de los costados se van escalando como en forma de pirámide.
- Hay 5 alumnos con menos estatura, esta oscila entre 0.91 y 1.00 metro.

Polígonos de frecuencia

Los **polígonos de frecuencias** se generan a partir de un histograma, se unen los puntos medios de cada una de las barras por segmentos de recta y se quitan las barras. Así el polígono de frecuencias es la unión de segmentos de recta, su presentación visual facilita la comparación de dos o más variables.

Ejemplo: En la secundaria “Benito Juárez” se recopilaron los resultados de una evaluación a alumnos. Se realizó lo siguiente:

a) Se acomodaron los datos en una tabla con intervalos de calificaciones.

Calificaciones	Alumnos
0-1.9	5
2-3.9	23
4-5.9	12
6-7.9	48
8-10	12

b) Se realizó el histograma.



c) Se unieron los puntos medios de las barras con segmentos de recta.



d) Quitaron las barras y obtuvieron el polígono de frecuencias siguiente.

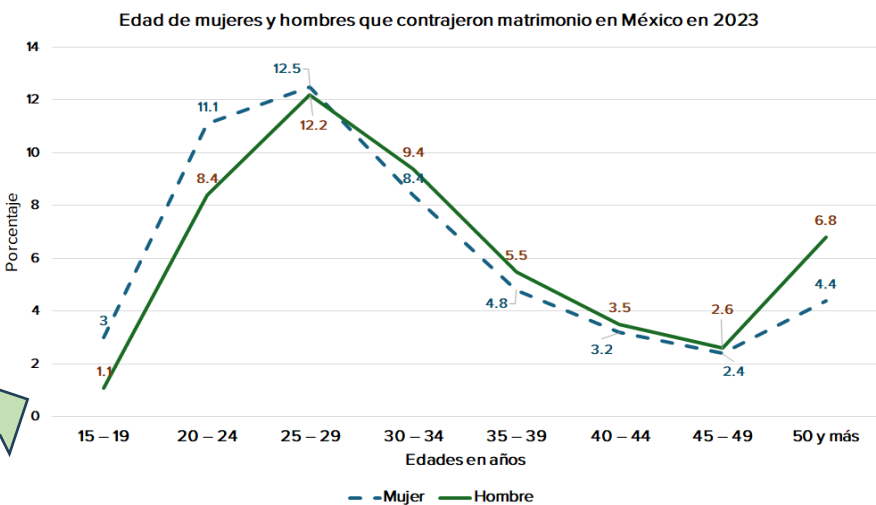


Estos tipos de gráficas también ayuda a comparar la frecuencia de los datos entre dos o más grupos de poblaciones, para así para tomar decisiones al momento de analizar los datos.

Ejemplo: La siguiente tabla presenta los porcentajes según la edad de mujeres y hombres que contrajeron matrimonio en México en 2023 según INEGI.

Edad en años	Mujer	Hombre
15 – 19	3.0	1.1
20 – 24	11.1	8.4
25 – 29	12.5	12.2
30 – 34	8.4	9.4
35 – 39	4.8	5.5
40 – 44	3.2	3.5
45 – 49	2.4	2.6
50 y más	4.4	6.8

<https://www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/boletines/2024/EMAT/EMAT2023.pdf>



Se realizó los polígonos de frecuencia en una sola gráfica.

Se observó que:

- en el rango de edad de 25 a 29 en ambos sexos en donde alcanza su máximo.
- de 15 a 29 años el porcentaje de mujeres es mayor.
- después de los 30 años el porcentaje de hombres fue mayor.

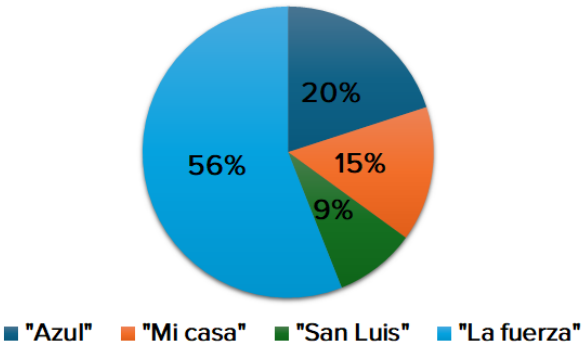
Representación gráfica de los datos

Una **gráfica circular** es un gráfico que se divide en áreas o sectores, cada uno representa la frecuencia de los datos que son representados en porcentajes. Estas gráficas circulares pueden ser útiles para ilustrar la relación de las partes con el todo cuando hay un número reducido de niveles.

Ejemplo: Se realizó una encuesta a 200 personas para saber qué marca de cemento prefieren, de ahí se realizó una tabla que incluía el porcentaje de los datos.

Marca de cemento preferida	Cantidad de personas	Porcentaje
"Azul"	40	20%
"Mi casa"	30	15%
"San Luis"	18	9%
"La fuerza"	112	56%
Total	200	100%

Marca de cementos preferida

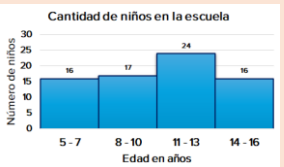
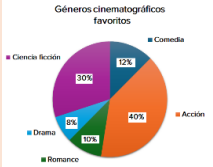


Obsérvese que para calcular el porcentaje correspondiente se hace una regla de 3:

$$\begin{aligned} 200 &\rightarrow 100\% \\ 40 &\rightarrow ? \\ ? &= (40)(100)/200 = 4000/200 = 20. \end{aligned}$$

El objetivo de una gráfica es representar visualmente de forma clara y precisa los datos estadísticos, así que éstas facilitan la lectura e interpretación de datos estadísticos, se usan según la información que se desea mostrar.

A continuación, se presenta una tabla con las características de las gráficas que se han visto.

Gráficas de barras	Histogramas	Polígonos de frecuencia	Gráficas circulares
Muestran la distribución de la información en barras, permiten comparar diferentes elementos de los datos.	Son gráficas de barras en donde estas se juntan, presentan gran cantidad de datos agrupados en clases estadísticas o subgrupos.	Se crean a partir de un histograma al unir los puntos medios de las barras por segmentos de recta.	Muestran la distribución proporcional de un conjunto no extenso de datos.
Se pueden visualizar un mayor número de datos que las circulares.	Sirven para identificar la acumulación, tendencia, variabilidad, dispersión y distribución de los datos.	Resultan muy útiles cuando se quieren comparar las tendencias o cambios en los datos por un tiempo determinado	Al sumar cada una de las partes en que se divide se obtiene una unidad o total, que, en términos de porcentajes, será el 100%.
			

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

4



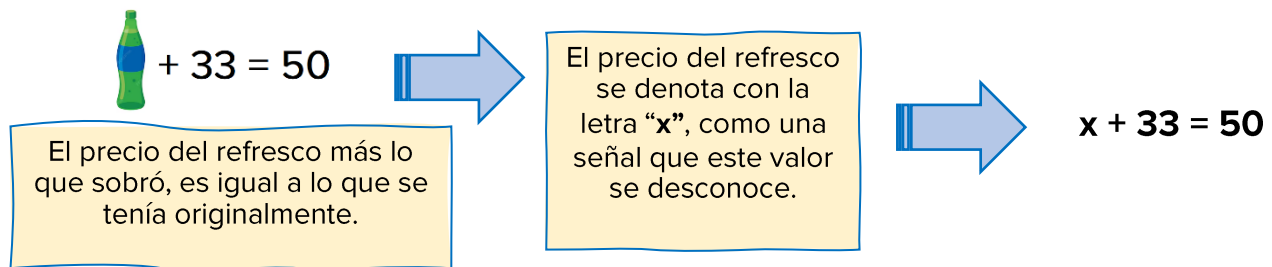
Guía de Pensamiento matemático 4

Sumas y restas de monomios

Tal vez hasta ahora para resolver un problema matemático solamente ha bastado con utilizar números reales, sin embargo, en ocasiones se necesita pasar de lo concreto a lo general y así resolver un conjunto de problemas del mismo tipo. Por ejemplo, la fórmula del cuadrado, lado por lado, denotada por $A = L \times L$, en ella es necesario utilizar letras para expresar esta relación.

$$A = L \times L$$

El **lenguaje algebraico** es una forma de escribir operaciones numéricas de forma general, así que puede suceder que no se conozcan todas las cantidades que participan en ellas. Por ejemplo, si Jaime gastó en un refresco, no sabe cuánto le costó, pero sabía que traía \$50 y le quedan \$33, puede hacer una resta, pero también esta operación se puede representar como:



Esta forma de escribir representa las operaciones de forma general y estructurada, para lo cual a los valores que se desconocen se reemplazan con letras, llamadas **literales**, las cuales reciben el nombre de **variables**, es decir, las **variables numéricas** se utilizan para describir con números situaciones de las cuales no se conoce toda la información sino solo una parte, no se tiene certeza de lo que ocurrirá o se buscan ciertos valores.

En matemáticas, los objetos como símbolos, operaciones o variables tienen una manera de escribirse. El modo en que se escriben los objetos matemáticos se llama **notación**, y el verbo que se usa para una notación es **denotar**.

Ejemplos: Mario tiene varios libros, pero no sabemos cuántos son, así que el número de libros que tiene se expresará con la letra "x". Denotar en lenguaje algebraico las siguientes situaciones.

a) Rita tiene el doble de libros que Mario.	b) Mario tendrá otros 10 libros el próximo mes.	c) La tercera parte de los libros de Mario son de color café.	d) Le restará 50 libros a su cantidad original.
$2 \cdot x$	$x + 10$	$\frac{x}{3}$	$x - 50$

Cuando dos números se multiplican se pueden escribir como 2×3 , $2 \cdot 3$, $2 * 3$ y $(2)(3)$, en una expresión algebraica para indicar que varias literales y números se están multiplicando, solamente se escriben juntos, de esta forma la "x" de multiplicación no se puede confundir con la "x" como variable. Por ejemplo: $6x$, $9xy$, $100zw$.

Las expresiones algebraicas se agrupan en **términos** por medio de signos de más (+) y de menos (-). Por ejemplo, la siguiente expresión algebraica tiene tres términos, pues hay dos signos "+", separando la expresión en tres partes.

$$\underbrace{2x^2}_{\text{Término 1}} + \underbrace{5xyz}_{\text{Término 2}} - \underbrace{y}_{\text{Término 3}}$$

Un **monomio** es una expresión algebraica que tiene solamente un término: $-25xyz$.

Un monomio o término se compone de literales, que a su vez tienen exponentes "y" grado.

El **grado** corresponde al exponente de la literal o a la suma de los exponentes de las literales que se están multiplicando, por ejemplo, en $9x^3$ el grado es 3; y en $-8x^3y^4$ el grado es 7 ya que $3 + 4 = 7$.

Cualquier literal elevada a cero da como resultado 1: $x^0 = 1$, $m^0 = 1$.

Se dice que dos **términos son semejantes** cuando tienen las mismas literales y que cada literal esté elevada a la misma potencia, por ejemplo $-4x^3y^4z$ y $\frac{3}{5}x^3y^4z$ son semejantes, pero $-x^4z$ y $-x^2z$ no lo son, ya que el exponente de "x" es diferente.

Cuando se habla de simplificar en matemáticas se refiere a reducir una expresión para que quede lo más compacta o pequeña posible, en el caso de **simplificar una expresión algebraica** es sumar o restar los términos semejantes.

Ejemplos:

Para simplificar términos semejantes solamente se realiza la operación entre los coeficientes, según la ley de los signos, y la parte literal se deja igual, ejemplo:

$$(-5x^3y^4) + (+9x^3y^4) = (-5 + 9) x^3y^4 = 4 x^3y^4$$

a) $(-9 mn) + (12 mn) = (-9 + 12) mn = 3 mn$

b) $(14 xy^3z^5) - (10 xy^3z^5) = (14 - 10) xy^3z^5 = -4 xy^3z^5$

c) $(12 yz) + (9 yz) = (12 + 9) yz = 21 yz$

d) $(-55 a^5b^7c) - (12 a^5b^7c) = (-55 - 12) a^5b^7c = -67 a^5b^7c$

Recordemos la ley de los signos en la multiplicación:

En la multiplicación de los números positivos y negativos, se toma en cuenta que los signos también se multiplican entre sí.

Ejemplos: $(-5)(-3) = 15$, $(-7)(12) = -84$

$$(+)(+) = +$$

$$(+)(-) = -$$

$$(-)(+) = -$$

$$(-)(-) = +$$

En la operación $8 - (-5)$ el signo menos antes del paréntesis está indicando una multiplicación, en donde menos por menos, es más, así que $8 - (-5) = 8 + 5 = 12$.

Por ejemplo: $3 - (+9) = 3 - 9 = -6$, $12 + (-4) = 12 -$

$4 = 8$, $4 + (+18) = 4 + 18 = 22$

Coefficiente: es un número real, que generalmente se coloca a la izquierda de la expresión, en el ejemplo es -7.

Signo: puede ser positivo o negativo; si se omite se interpreta como positivo.

$$-7x^2y^3$$

Exponente de la literal: cada literal tiene un exponente, que puede ser 0, 1, 2, 3... En este caso, el exponente de la literal "x" es 2 y el exponente de la literal "y" es 3.

Literales: son las letras que contiene el término, en este caso son "x" y "y".

Suma de monomios

$$(-2x^2) + (-5x^2) = (-2x^2) - (5x^2) = (-2 - 5)x^2 = -7x^2$$

Resta de monomios

$$(9xy^3) - (-2xy^3) = (9xy^3) + (2xy^3) = (9 + 2)xy^3 = 11xy^3$$

Ejemplos:

a) $(10x^2y) - (7x^2y) = (10 - 7)x^2y = 3x^2y$

c) $(-3x^2y^2z) - (-20x^2y^2z) = (-3 + 20)x^2y^2z = 17x^2y^2z$

b) $(-8xy^2z) - (15xy^2z) = (-8 - 15)xy^2z = -23xy^2z$

d) $(20x^2y) - (-15x^2y) = (20 + 15)x^2y = 35x^2y$

Multiplicación y división de monomios

A diferencia de la suma y la resta de monomios, para multiplicar dos monomios no importa si son semejantes, es decir, si no tienen la misma parte literal, lo que sí es importante es aplicar correctamente la ley de los signos en la multiplicación.

Primero vamos a ver cómo se multiplican las literales, observa que x^3 por x^5 se denota como $(x^3)(x^5)$.

$$(x^3)(x^5) = (\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{3 \text{ veces}})(\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{5 \text{ veces}}) = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{8 \text{ veces}} = x^{3+5} = x^8$$

Por ejemplo, al multiplicar "x" por "m", solamente se denota "xm", es decir se deja indicada la multiplicación, los exponentes solamente se suman cuando las literales son iguales.

Multiplicación de monomios	$(-3x^2y)(8x^7)$	
1. Primero se multiplican los signos.	$(-)(+) = -$	$(-3x^2y)(8x^7) = -$
2. Después se multiplican los coeficientes.	$(3)(8) = 24$	$(-3x^2y)(8x^7) = -24$
3. Y al final se multiplican las literales y como son iguales, los exponentes se suman.	$x^2 \cdot x^7 = x^{2+7} = x^9$, "y" pasa igual.	$(-3x^2y)(8x^7) = -24x^9y$

Ejemplos:

a) $(-10a^5b^2c)(a^2bc^3) = (-10)(1)a^{5+2}b^{2+1}c^{1+3} = -10a^7b^3c^4$

b) $(-5m^5n^2)(-2mn) = (-5)(-2)m^{5+1}n^{2+1} = 10m^6n^3$

La división, en álgebra, hay tres formas comunes para denotarla.

1. Como un número racional. $\frac{-25y}{5y}$ El monomio $-25y$ está dividiendo entre el monomio $5y$.	2. Con un exponente negativo. $4m^{-3} = \frac{1}{4m^3}$	3. Con la casita (galera) de la división. $3a \overline{) a^4 b^2}$ Indica que el monomio a^4b^2 se está dividiendo entre el monomio $3a$.
--	---	--

Primero vamos a ver cómo se dividen las literales, observa que x^6 entre x^3 se denota como $\frac{x^6}{x^3}$.

$$\frac{x^6}{x^3} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = x^{6-3} = x^3$$

Al dividir “x” entre “m”, solamente se denota $\frac{x}{m}$, es decir se deja indicada la división, los exponentes solamente se restan cuando las literales son iguales.

Recordemos la ley de los signos en la división:
En la división de los números positivos y negativos, se toma en cuenta que los signos también se dividen entre sí.
Ejemplos: $(-120) \div (-6) = 20$

$$\begin{aligned} + \div + &= + \\ + \div - &= - \\ - \div + &= - \\ - \div - &= + \end{aligned}$$

División de monomios	$\frac{120x^7}{-5x^2}$	
1. Primero se dividen los signos.	$(+) \div (-) = -$	$\frac{120x^7}{-5x^2} = -$
2. Después se dividen los coeficientes.	$120 \div 5 = 24$	$\frac{120x^7}{-5x^2} = -24$
3. Y al final se dividen las literales y si son iguales, sus exponentes se restan entre sí.	$\frac{x^7}{x^2} = x^{7-2} = x^5$	$\frac{120x^7}{-5x^2} = -24x^5$

Ejemplos:

- $\frac{-40m^8n^7}{10mn^4} = -4m^{8-1}n^{7-4} = -4m^7n^3$
- $\frac{81c^{12}d^9}{9c^{10}d^5} = 9c^{12-10}d^{9-5} = 9c^2d^4$
- $\frac{-110x^6y^3}{-11x^2y^2} = 10x^{6-2}y^{3-2} = 10x^4y$

Sumas y restas de polinomios

Recuerda que una expresión algebraica es aquella que combina letras (literales, variables o incógnitas) con números y operaciones matemáticas, se clasifican según su número de términos:

- Si consta de uno se llama **monomio** $\rightarrow 3x^3y^{12}$
- Si tiene dos se le llama **binomio** $\rightarrow 3x^3y^{12} + 4x^5$
- Al tener tres se le llama **trinomio** $\rightarrow 3x^3y^{12} + 4x^5 - 15y$
- Cuando tiene cuatro o más **polinomio** $\rightarrow 3x^3y^{12} + 4x^5 - 15y - 12$

El **grado del polinomio** es igual al exponente más grande que tenga cualquiera de las literales, por ejemplo, en $3x^5 + 5x^2y + xy^3 + 6y^4 + 8$, el grado es 5, corresponde al exponente de “3x” que es el término con mayor grado.

Antes de pasar a la suma y resta de polinomios recordemos la **propiedad distributiva para la multiplicación**, ésta permite distribuir un número que se esté multiplicando por una suma o resta entre paréntesis.

Se aplica esta propiedad distributiva en el producto de binomios como en el ejemplo.

$$5x(5x^2 + 7) = (5x)(5x^2) + (5x)(7) = 25x^3 + 35x$$

Suma de polinomios

$$(12a^2 + 9ab - b^2) + (3a^2 - ab - 6b^2) =$$

Primero. - Se quita el paréntesis. Por tratarse de una suma, cada término del primer y segundo polinomio conservan sus signos originales:

$$(12a^2 + 9ab - b^2) + (3a^2 - ab - 6b^2) = 12a^2 + 9ab - b^2 + 3a^2 - ab - 6b^2$$

Segundo. - Se identifican los términos semejantes:

$$(12a^2 + 9ab - b^2) + (3a^2 - ab - 6b^2) = 12a^2 + 9ab - b^2 + 3a^2 - ab - 6b^2$$

Tercero. - Se suman algebraicamente:

$$(12a^2 + 9ab - b^2) + (3a^2 - ab - 6b^2) = 12a^2 + 3a^2 + 9ab - ab - b^2 - 6b^2 = 15a^2 + 8ab - 7b^2$$

Resta de polinomios

$$(8a^3 - 9a^2b - 5b^2) - (2a^3 - 10a^2b + b^2) =$$

Primero. - Se quita el paréntesis. Por tratarse de una resta, siguiendo la ley de los signos se cambian los signos a todos los términos del segundo polinomio:

$$(8a^3 - 9a^2b - 5b^2) - (2a^3 - 10a^2b + b^2) = 8a^3 - 9a^2b - 5b^2 - 2a^3 + 10a^2b - b^2$$

Segundo. - Se identifican los términos semejantes:

$$(8a^3 - 9a^2b - 5b^2) - (2a^3 - 10a^2b + b^2) = 8a^3 - 9a^2b - 5b^2 - 2a^3 + 10a^2b - b^2 =$$

Tercero. - Se suman algebraicamente:

$$(8a^3 - 9a^2b - 5b^2) - (2a^3 - 10a^2b + b^2) = 8a^3 - 2a^3 - 9a^2b + 10a^2b - 5b^2 - b^2 = 6a^3 + a^2b - 6b^2$$

Ejemplos:

a) $(2x^2yz - 10y) + (8x^2yz - 9y) = 2x^2yz - 10y + 8x^2yz - 9y = 2x^2yz + 8x^2yz - 10y - 9y = 10x^2yz - 19y$

b) $(5x^2y + 3xy + 8) + (12x^2y + 4xy - 1) = 5x^2y + 3xy + 8 + 12x^2y + 4xy - 1 = 5x^2y + 12x^2y + 3xy + 4xy + 8 - 1 = 17x^2y + 7xy + 7$

c) $(5xy + 12x) - (3xy + 2x) = 5xy + 12x - 3xy - 2x = 5xy - 3xy + 12x - 2x = 2xy + 10x$

d) $(12x^2yz - 3xyz + 2) - (24x^2yz + 2xyz - 3) = 12x^2yz - 3xyz + 2 - 24x^2yz - 2xyz + 3 = 12x^2yz - 24x^2yz - 3xyz - 2xyz + 2 + 3 = -12x^2yz - 5xyz + 5$

Multiplicación y división de polinomios

Para **multiplicar dos polinomios** se aplica la propiedad distributiva, se explicará ésta mediante un ejemplo.

Multiplicar $(x - 4y)$ por $(-2x^2 + xy + 3y)$

1. Se acomodan en forma de multiplicación. Recuerda que los paréntesis indican multiplicación cuando no hay un signo entre ellos.

$$(x - 4y)(-2x^2 + xy + 3y)$$

2. Se multiplica cada término del polinomio más corto, en este caso es $x - 4y$, por todos los términos del segundo polinomio.

$$(x - 4y)(-2x^2 + xy + 3y) = x(-2x^2 + xy + 3y) - 4y(-2x^2 + xy + 3y)$$

3. Se realiza la primera multiplicación parcial, usando la distributividad.

$$x(-2x^2 + xy + 3y) = x(-2x^2) + x(xy) + x(3y) = -2x^3 + x^2y + 3xy$$

4. Se realiza la segunda multiplicación parcial, usando la distributividad.

$$-4y(-2x^2 + xy + 3y) = -4y(-2x^2) - 4y(xy) - 4y(3y) = 8x^2y - 4xy^2 - 12y^3$$

5. Se juntan ambas multiplicaciones parciales para obtener el resultado.

$$(x - 4y)(-2x^2 + xy + 3y) = x(-2x^2 + xy + 3y) - 4y(-2x^2 + xy + 3y) = -2x^3 + x^2y + 3xy + 8x^2y - 4xy^2 - 12y^3$$

6. Se simplifica el polinomio reduciendo entre sí los términos semejantes.

$$\begin{aligned} &= -2x^3 + x^2y + 8x^2y + 3xy - 4xy^2 - 12y^3 \\ &= -2x^3 + 9x^2y + 3xy - 4xy^2 - 12y^3 \end{aligned}$$

$$(x - 4y)(-2x^2 + xy + 3y) = -2x^3 + 9x^2y + 3xy - 4xy^2 - 12y^3$$

Ejemplos:

a) $(x - y^2)(-x - y) = x(-x - y) + (-y^2)(-x - y) = (x)(-x) + (x)(-y) + (-y^2)(-x) + (-y^2)(-y) = -x^2 - xy^2 + xy + y^3$

b) $(x + y)(x^2 + xy) = x(x^2 + xy) + y(x^2 + xy) = x(x^2) + x(xy) + y(x^2) + y(xy) = x^3 + x^2y + x^2y + xy^2 = x^3 + 2x^2y + xy^2$

Para **dividir entre sí dos polinomios** antes que nada ambos polinomios deben estar ordenados de mayor a menor con respecto a los exponentes de sus literales, por ejemplo, si se desea dividir $2a^2 - 2 + 3a$ entre $2 + a$, primero se acomodan con respecto a la literal "a" en orden descendente, de esta forma los polinomios quedan como $2a^2 + 3a - 2$ entre $a + 2$. Por medio de la división de este ejemplo se explicarán los pasos a seguir.

Dividir $2a^2 + 3a - 2$ entre $a + 2$

1. Se acomodan en el formato de la división con casita (galera).

$$a + 2 \overline{) 2a^2 + 3a - 2}$$

2. Luego se divide el primer término del polinomio dividendo entre el primer término del polinomio divisor.

$$\frac{2a^2}{a} = 2a$$

3. Se escribe el resultado en el cociente de la división de polinomios.

$$a + 2 \overline{) 2a^2 + 3a - 2} \quad \begin{array}{r} 2a \end{array}$$

4. El resultado se multiplica por cada término del polinomio divisor y lo que resulte se escribe en el residuo con el signo cambiado, para después hacer la reducción.

$$a + 2 \overline{) 2a^2 + 3a - 2} \quad \begin{array}{r} 2a \\ -2a - 4a \\ \hline 0 - 1a \end{array}$$

5. Se "baja" el siguiente término del polinomio dividendo y se repite el procedimiento anterior.

$$a + 2 \overline{) 2a^2 + 3a - 2} \quad \begin{array}{r} 2a \\ -2a - 4a \\ \hline 0 - 1a - 2 \end{array}$$

6. Ahora se divide el primer término del residuo entre el primer término del divisor, en este caso es $-1a$ entre a , $\frac{-a}{a} = -1$, luego se escribe el resultado en el cociente de la división de polinomios.

$$a + 2 \overline{) 2a^2 + 3a - 2} \quad \begin{array}{r} 2a - 1 \\ -2a - 4a \\ \hline 0 - 1a - 2 \end{array}$$

7. Se multiplica por cada término del polinomio divisor y el resultado se escribe en el residuo con el signo cambiado, para después hacer la reducción.

$$a + 2 \overline{) 2a^2 + 3a - 2} \quad \begin{array}{r} 2a - 1 \\ -2a - 4a \\ \hline 0 - 1a - 2 \\ 1a + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

8. De haber más términos en el polinomio dividendo, se repite el procedimiento hasta haberlos "bajado" a todos

Ejemplos:

a) Dividir $x^2 + 3x - 10$ entre $x + 5$

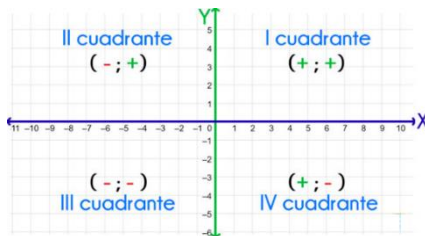
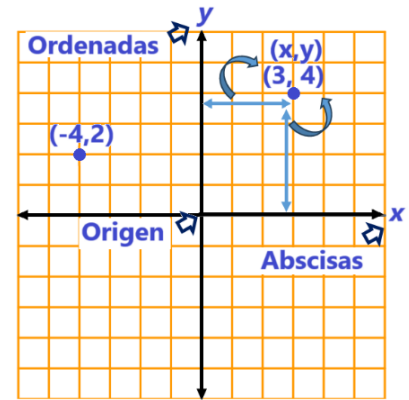
$$\begin{array}{r} x - 2 \\ x + 5 \overline{) x^2 + 3x - 10} \\ \underline{-x^2 - 5x} \\ -2x - 10 \\ \underline{2x + 10} \\ 0 \end{array}$$

b) Dividir $2x^2 - 5x - 12$ entre $x - 4$

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ x - 4 \overline{) 2x^2 - 5x - 12} \\ \underline{-2x^2 + 8x} \\ 3x - 12 \\ \underline{-3x + 12} \\ 0 \end{array}$$

El plano cartesiano y las partes que lo componen

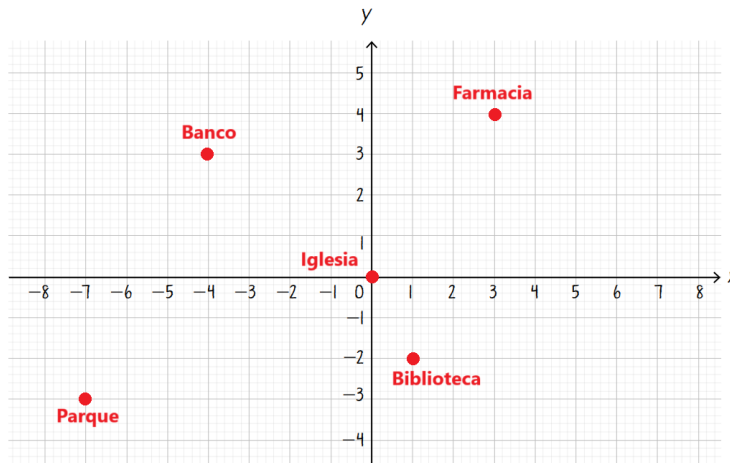
El **plano cartesiano** fue creado por René Descartes (1596-1650), lo usó para relacionar el álgebra con la geometría. Este plano está compuesto por **dos rectas numéricas perpendiculares que se cruzan** en un punto llamado **origen**, a estas rectas se les llama ejes, así que al **eje horizontal** se le llama eje de las “**x**” o eje de las **abscisas** y al **eje vertical** se le llama eje de las “**y**” o eje de las **ordenadas**. En el plano cartesiano se ubican puntos, estos son llamados **coordenadas**, para las coordenadas se necesitan dos números, uno por cada recta, y se escriben entre paréntesis y separados por una coma, por ejemplo (3,4). Los puntos se suelen nombrar con letras mayúsculas. En la imagen está representado el punto (3,4), esta coordenada se ubica al recorrer 3 lugares hacia la derecha del origen (sobre el eje “x”) y luego 4 lugares hacia arriba del origen (en línea paralela del eje “y”).



Las intersecciones de los ejes producen **cuatro regiones llamadas cuadrantes**, que se indican con números romanos. En el **cuadrante I** las coordenadas tienen **signos (+,+)**; en el **cuadrante II** las coordenadas tienen signos **(-,+)**; en el **cuadrante III** los signos de las coordenadas son **(-,-)**; y en el **cuadrante IV** los signos de las coordenadas son **(+,-)**.

Ejemplos:

a) Observa el plano cartesiano, escribe las coordenadas de cada sitio.



Banco (-4, 3)

Farmacia (3, 4)

Iglesia (0, 0)

Parque (-7, -3)

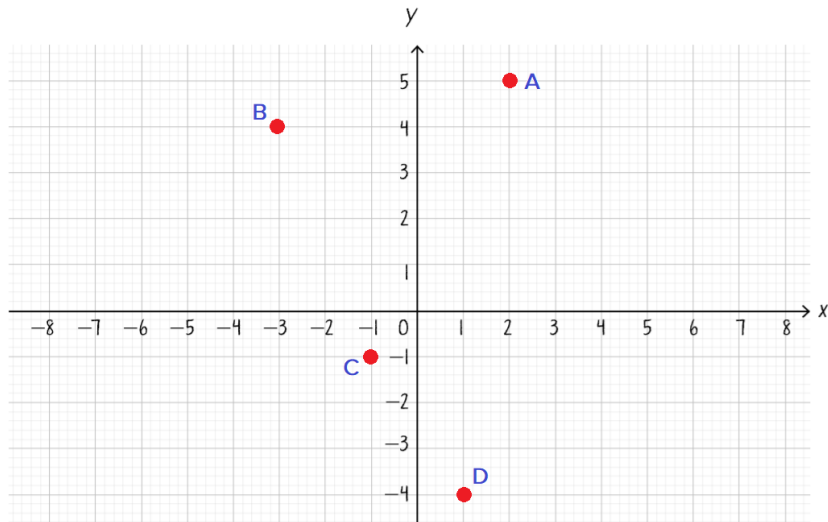
Biblioteca (1, -2)

b)

Ubica las coordenadas en la posición correcta del plano

cartesiano:

A) (2, 5), B) (-3, 4), C) (-1, -1), D) (1, -4)



El trazo de rectas en el plano cartesiano



Paty va a invitar a sus amigas al cine, las entradas valen \$70, ella está confirmando quienes podrán asistir y así saber lo que va a pagar; en este caso el pago va a depender del número de amigas que vayan al cine, así en matemáticas al tener dos valores que van cambiando y uno depende del otro se dice que, una variable es dependiente y la otra variable es independiente.

Cuando se dice que la **variable “y” depende de la “x”**, significa que los valores de la “y” dependen de los valores que se le asignen a la “x”.

Si “x” es el número de amigas que irán al cine y “y” el costo, de este modo “y” será igual a $70x$, pues el costo es \$70, y se multiplicará por el número de amigas que irán (x). Lo anterior se escribe como una función, $y(x) = 70x$.

Las **funciones** pueden representarse con ecuaciones o fórmulas, se lee “y” está en función de “x”. También puede escribirse como $f(x) = 70x$ y se lee: “la función de x es igual a $70x$ ”, donde la función de “x” es igual a “y”.

Una **igualdad** indica que el lado izquierdo es igual a lo que está del lado derecho. Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas y se puede utilizar para representar una función. Una función es la relación entre dos o más valores.

Entonces, cuando se dice que la **“y” está en función de la “x”** significa que el valor de la “y” depende de lo que valga la “x”. Por este motivo, a la **“y”** se le conoce como **variable dependiente** y a la **“x”** como **variable independiente**.

Sucede que Paty, encontró una oferta en el cine, a partir del segundo boleto este vale \$50 pesos.

Si “x” es el número de amigas que irán al cine, el costo del total de ellas será de $50x$, el costo de Paty es de \$70, entonces el costo total es de $50x + 70$, esto se representa como $y(x) = 50x + 70$. Si van 3 amigas Paty gastará $50(3) + 70 = 150 + 70 = 220$, esto se representa como $y(3) = 50(3) + 70 = 220$.

Ejemplos: a) En la función $y(x) = 4x + 3$, ¿cuál es el valor de y cuando x toma el valor de 4?

En este caso se denota $y(4) = 4(4) + 3 = 16 + 3 = 19$.

b) En la función $y(x) = -3x$, ¿cuál es el valor de y cuando x toma el valor de 7?

Si $x = 7$, entonces se denota $y(7) = -3(7) = -21$.

c) En la función $y(x) = 12x^2$, ¿cuál es el valor de y cuando x toma el valor de 2?

Al ser $x = 2$, entonces $y(2) = 12(2)^2 = 12(4) = 48$.

Cuando se necesita saber cómo se comporta una función para más de un valor, se calcula “y” para distintos valores, una forma sencilla de ordenar los valores es usar una tabla de valores.

Paty, realizó una tabla usando los números del 1 al 7, estos números son el rango de valores.

Primero calculó los valores:
 $y(x) = 50x + 70$

$$\begin{aligned} y(1) &= 50(1) + 70 = 50 + 70 = 120 \\ y(2) &= 50(2) + 70 = 100 + 70 = 170 \\ y(3) &= 50(3) + 70 = 150 + 70 = 220 \\ y(4) &= 50(4) + 70 = 200 + 70 = 270 \\ y(5) &= 50(5) + 70 = 250 + 70 = 320 \\ y(6) &= 50(6) + 70 = 300 + 70 = 370 \\ y(7) &= 50(7) + 70 = 350 + 70 = 420 \end{aligned}$$

Luego realizó la tabla.

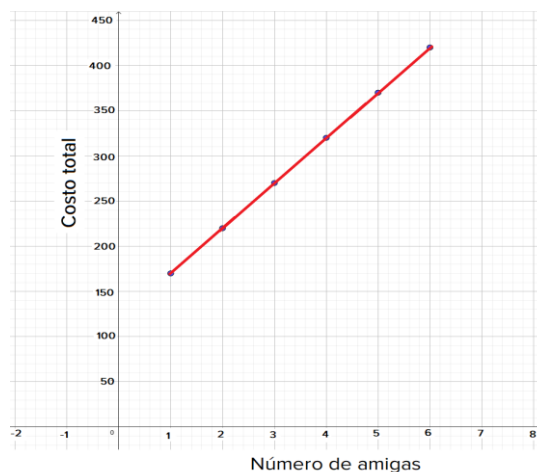


Número de amigas	Costo total $y(x) = 50x + 70$
1	120
2	170
3	220
4	270
5	320
6	370
7	420

Las **funciones** y los distintos valores que se obtienen al variar los valores de “x” y de “y” pueden graficarse en el plano cartesiano.

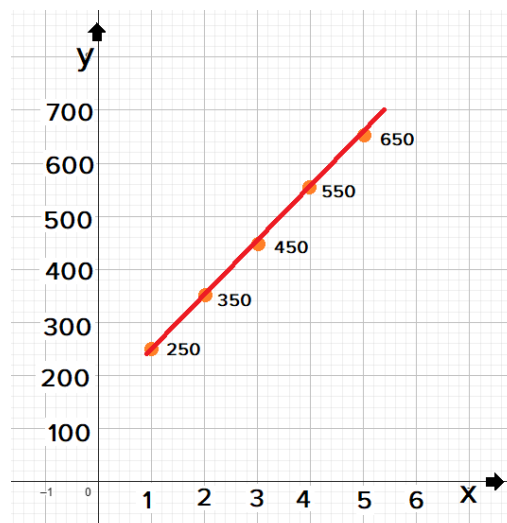
Se considera que cada par de valores de “x” y “y” de la tabla corresponde con una coordenada (x, y) de un punto del plano cartesiano.

(1, 120)
 (2, 170)
 (3, 220)
 (4, 270)
 (5, 320)
 (6, 370)
 (7, 420)



Ejemplo: Realiza la gráfica de la función $f(x) = 100x + 150$. Tomando el rango de 1 a 5 la tabla es la siguiente, su gráfica también se muestra.

Número de amigas	Costo total $y(x) = 100x + 150$
1	250
2	350
3	450
4	550
5	650



La interpolación y su procedimiento

En ocasiones solamente se conocen algunos datos de una función y no su expresión algebraica.

La **interpolación** es un método a través del cual se encuentran puntos en una tabla o gráfica a partir de un conjunto de datos que ésta misma contiene, es decir, por medio de un método numérico se calcula un valor desconocido entre dos valores conocidos de una tabulación (función).

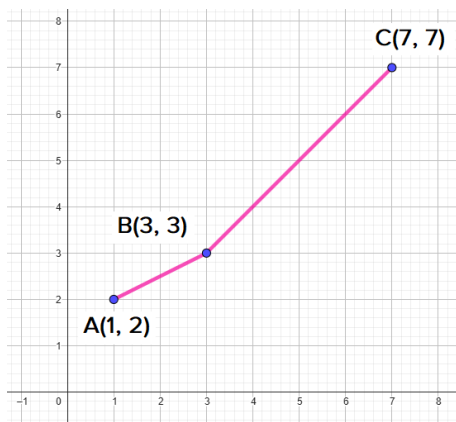
Por ejemplo, se tiene la tabla de la izquierda, ¿cómo saber cuánto vale la “y” cuando $x = 4$?

x	y(x)
1	2
3	3
4	?

7 7

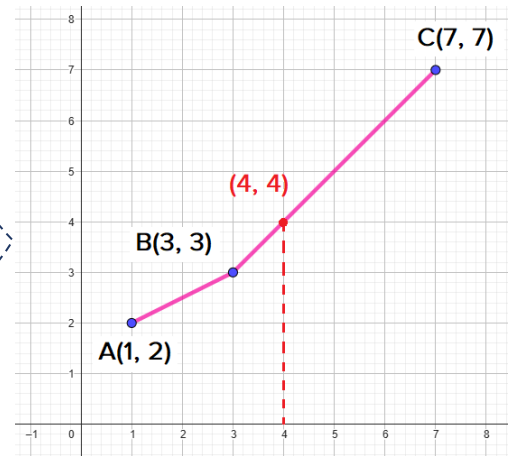
El valor de $x = 4$ se encuentra dentro del rango de valores que se conocen, al estar el valor de la "x" dentro del rango de valores conocido, se necesita hacer una interpolación. Primero, los datos de la tabla estén ordenados de acuerdo con el valor de "x", luego se debe ubicar el valor que se quiere conocer en la tabla.

A continuación, se realiza la gráfica de la tabla.



Luego se busca la coordenada del plano cartesiano que tiene el valor de $x=4$, pero que se encuentre sobre la gráfica.

Se ubica el punto $x=4$ en el eje horizontal y se sube una recta paralela al eje vertical hasta tocar la recta de la gráfica.

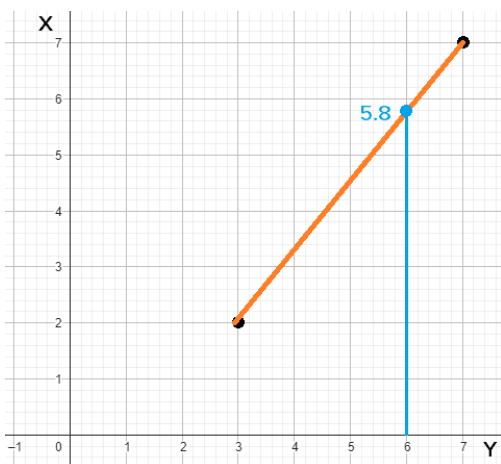


En este caso el valor para $x = 4$ es $y = 4$.

Ejemplos:

a) Laura vende 3 paletas por \$2 pesos y 7 paletas por \$7 pesos. ¿En cuánto debería vender 6 paletas? Se tiene entonces la siguiente tabla y gráfica.

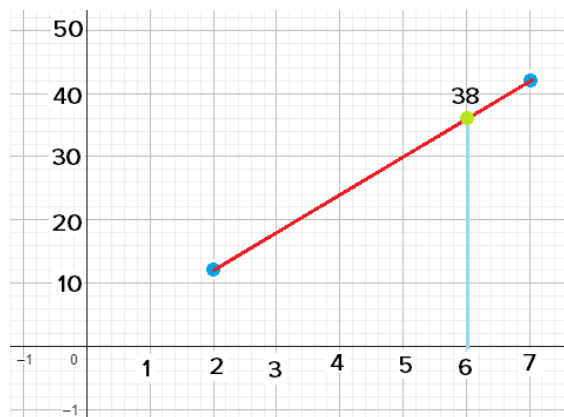
x	y(x)
3	2
6	?
8	7



Debe vender 6 paletas por \$5.8

b) Manuel compró 2 sacapuntas por \$12. Una semana después, regresó y compró otros 7 sacapuntas por \$42. ¿Cuánto debería pagar si comprara 6 sacapuntas?

x	y(x)
2	12
6	?
7	42



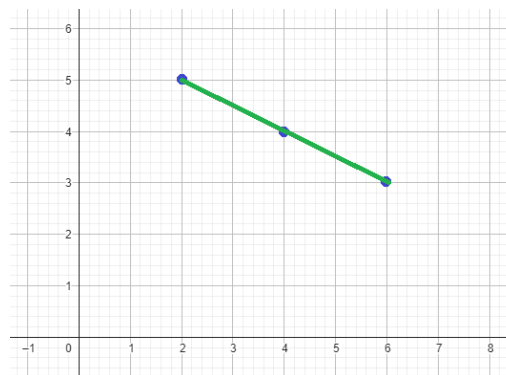
Debería pagar \$38 por 6 sacapuntas.

Extrapolación de puntos en el plano cartesiano

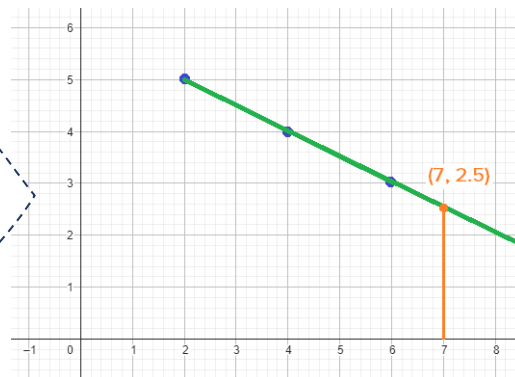
La **extrapolación** matemática es el procedimiento mediante el cual se estima el valor de una variable “x” que está fuera del intervalo de datos con los que se cuentan. Para encontrar el valor de “y”, se extiende la línea de la función hasta hallar el punto en el que toca a la línea vertical.

Por ejemplo, se tienen los puntos (2, 5), (4, 4) y (6, 3), ¿cuál será el valor de $x = 7$?

A continuación, se realiza la gráfica de los puntos.



Luego se extiende la gráfica de la función de forma que se busca la coordenada del plano cartesiano que tiene el valor de $x=7$ y que al trazar una recta paralela al vertical corte a la gráfica.



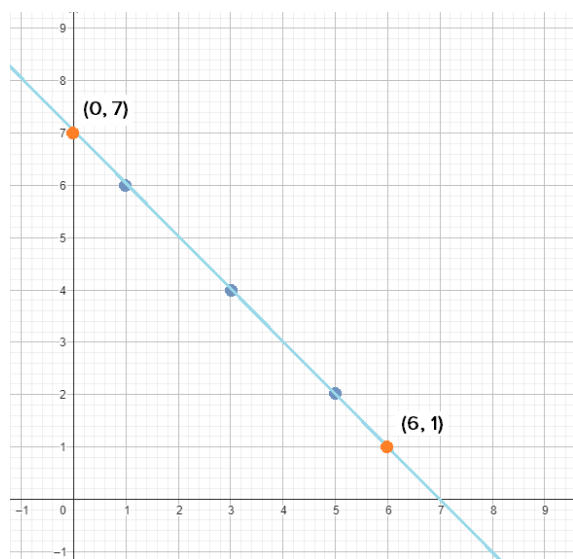
En este caso el valor para $x = 7$ es $y =$

2.5.

Ejemplos:

a) Elabora la gráfica de la tabla y localiza un punto anterior y posterior de los valores que contiene; es decir, que sea un punto extrapolado.

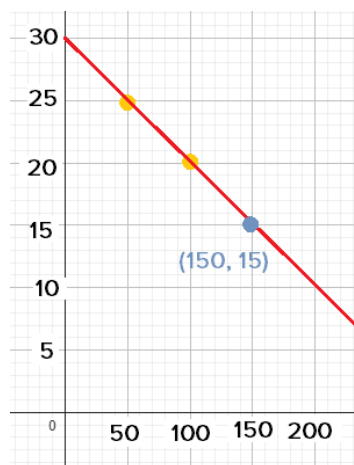
x	y(x)
1	6
3	4
5	2



Si $x = 0$ entonces $y = 7$, si $x = 6$ luego $y = 1$.

b) Se van a comprar bolsas para vender, el costo de éstas depende de cuántas se compran, entre más bolsas se compran menor será el costo por pieza. Si se compran 50 piezas, cada una costará \$25, y si se compran 100 piezas, cada una costará \$20. ¿Cuánto dinero costará cada bolsa si se compran 150 en total, que es el tope de ventas con descuento?

Los puntos son para $x = 50$, $y = 25$, y para $x = 100$ se tiene $y = 20$.



Si se compran 150 bolsas la pieza costará \$15.

Situaciones en las que interviene el azar



La **probabilidad** estudia en qué medida es posible que suceda un resultado, usualmente se usan frases como “muy probable” o “poco probable”, por ejemplo, es muy probable que en temporada de invierno el clima estará frío y es muy poco probable que se gane la lotería al comprar solamente un boleto. En probabilidad se busca conocer en qué medida es posible que suceda un resultado, por ejemplo, al lanzar una moneda solamente se tienen dos resultados pues la

moneda tiene dos caras, se dice que se tiene el 50% de probabilidad de que caiga en cara y el 50% de que caiga en cruz.

Un **evento de probabilidad** es una situación en la que no se puede anticipar y cambiar el curso de los hechos. El **azar** es la característica de un experimento que cada vez que se lleva a cabo produce resultados diversos, impredecibles en cada situación concreta, pero cuyas frecuencias, a la larga, tienden a estabilizarse. Por ejemplo, interviene el azar al lanzar una moneda, pues no se sabe que cara caerá, pero sacar una ficha azul de una caja donde solamente hay fichas azules es un evento en donde no interviene el azar.



Los eventos en los que **no influye el azar** son aquellos donde los factores externos no pueden cambiar el resultado.

Ejemplo: Subraya las situaciones en las que interviene el azar y tacha en las que no interviene.

- a) El ser humano necesita agua para vivir. **X**
- b) Obtener un chocolate de una caja de chocolates. **X**
- c) Elegir un "Rey" de una baraja de cartas sin ver.
- d) Que salga un cinco al lanzar un dado.

Experimentos aleatorios con dos resultados posibles

Un **experimento** es la observación de un fenómeno que sucede en la naturaleza, hay dos tipos, experimento determinista y experimento aleatorio.

Experimento	determinista	aleatorio
Características	No hay dudas acerca del resultado que se conseguirá si se repite varias veces.	No se puede anticipar el resultado de lo que va a ocurrir porque interviene el azar, aunque sí se conocen todos los resultados posibles que se pueden obtener al realizarlo.
Ejemplos	a) Al dejar cubos de hielo bajo el sol siempre se tendrá como resultado que se derritan. b) Al sumar $2 + 2$ siempre tendrá 4 como resultado. c) Tener una bolsa llena de fichas azules y extraer una para conocer su color, solamente se tiene un resultado: es completamente predecible que la ficha extraída será de color azul.	a) Lanzar una moneda y observar de qué lado cayó, solamente se tiene dos resultados posibles. b) Lanzar un dado y observar en que cara cayó, se tienen 6 resultados posibles.

La característica de un experimento aleatorio es que se ejecuta varias veces de forma controlada para registrar los resultados; es decir, que se repiten las condiciones posibles en las que sucedió cuando se ejecutó por primera vez

Dentro del experimento aleatorio, se llama **evento** el resultado que se obtiene después de realizarlo. Por ejemplo, al registrar los resultados de lanzar una moneda, primero se identifica como evento cada lado de la moneda: un evento es cara y el otro evento es águila.

También si se juega a adivinar en qué mano se oculta un objeto (el experimento consiste en que se escondan tras la espalda ambas manos y con una se sostenga un objeto, se trata de adivinar en cuál mano se tiene el objeto) se tienen dos opciones, se tienen dos eventos: adivinar o no.

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los eventos posibles o resultados que se obtienen al realizar un experimento. En el experimento aleatorio de lanzar una moneda el espacio muestral es cara y águila, se denota como espacio muestral = {cara, águila}. A veces es posible simplificar la escritura; en este caso se simplifica con C el evento cara y con A el evento águila, y se escribe espacio muestral = {C, A}



Si se lanza la moneda cuatro veces, entonces se registran cuatro valores en el conjunto de resultados. Si los valores obtenidos son águila, cara, cara y águila, el conjunto de resultados será: Resultados = {A, C, C, A}.

Ejemplos: a) Si se lanza una moneda varias veces y se dice que el resultado fue = {A, C, C, A, C, A, A}, entonces significa que se lanzó 7 veces, cayó cuatro veces en águila y tres en cara.



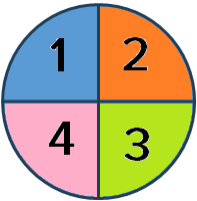
b) Se tiene una bolsa negra con dos canicas, una blanca y una roja, al realizar el experimento aleatorio de extraer sin ver una canica entonces el espacio muestral es = {B, R}, donde B denota la canica blanca y R la canica roja. Se realizó el experimento varias veces con reposición, es decir, se extrae una canica y se vuelve a colocar en la bolsa antes de otra extracción, los resultados fueron los siguientes: Resultados = {R, R, R, B, R, R, R, B, R, R, B, R, B, R, R}. De aquí se deduce que el experimento se llevó acabo 15 veces, de las cuales salió canica roja 11 veces y canica blanca 4 veces.

Experimentos aleatorios con hasta seis resultados posibles

Recuerda que el porcentaje es un número que va desde el 0% hasta el 100%, cuando se aplica a la probabilidad, el cero es la nula posibilidad de que un resultado suceda y el cien representa la completa certeza de que este resultado ocurra.

El experimento de lanzar una moneda tiene un espacio muestral de dos resultados, cara y águila, cada uno tiene la mitad de las posibilidades de ocurrir, así que, se tiene el 50% de probabilidad de que suceda cada uno.

La probabilidad de que un evento suceda está entre cero y uno, con el cero como nulo y el 1 como resultado seguro, así que es un número decimal que se encuentra entre 0 y 1.

Evento equiprobable	Evento no equiprobable
La probabilidad de obtener un resultado u otro es la misma.	La probabilidad de obtener un resultado u otro no es la misma.
Ejemplos: a) Si se lanza un dardo hacia la ruleta de la imagen la probabilidad de que caiga en un color determinado es igual, pues el área que tiene cada color es la misma.  b) Al lanzar una moneda el que caiga cara o águila tienen la misma probabilidad.	Ejemplos: a) Si se lanza un dardo hacia la ruleta de la imagen la probabilidad de que caiga en un color determinado no es igual, pues el área que tiene el 1 es más grande.  b) Extraer una ficha roja de una bolsa en la que se tienen cuatro fichas rojas y una verde, las probabilidades no son iguales para cada color.

Para calcular la probabilidad de cualquier resultado se usa la fórmula siguiente:

$$P = \frac{\text{Eventos favorables}}{\text{Total de eventos}}$$

Por ejemplo, al lanzar una moneda el total de los eventos son dos, cara o águila, entonces la probabilidad de lanzar una moneda y que caiga en cara es igual a $P = \frac{1}{2} = 0.5$, significa que se tiene la mitad de posibilidad de obtener cara, ya que es un evento equiprobable, la probabilidad de obtener águila será también 0.5, expresado en forma de porcentaje como 50%. Si se suman las probabilidades de los eventos del espacio muestral, el resultado debe ser 1: $0.5 + 0.5 = 1$.

Al tirar un dado el espacio muestral es = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, la

probabilidad de que caiga un 5, es de $P = \frac{\text{Eventos favorables}}{\text{Total de eventos}} = \frac{1}{6} =$

0.166



Si un dado se lanza 15 veces y los valores obtenidos son resultados = {2, 5, 5, 6, 1, 3, 2, 1, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 2} entonces el 1 cayó 3 veces, el 2 cayó 5 veces, el 3 cayó 2, el 5 cayó 3 veces y el 6 cayó 2 veces.

Amalia tiene una bolsa obscura, en ella hay 6 canicas: una canica blanca (B), una negra (N), una azul (A), una roja (R), una verde (V) y una amarilla (AM). Sin ver sacará una canica al azar, para ese evento el espacio muestral es = {B, N, A, R, V, AM}, la probabilidad de que obtenga una canica verde es $P =$

$\frac{\text{Eventos favorables}}{\text{Total de eventos}} = \frac{1}{6} = 0.166$.

Experimentos aleatorios con doce resultados posibles

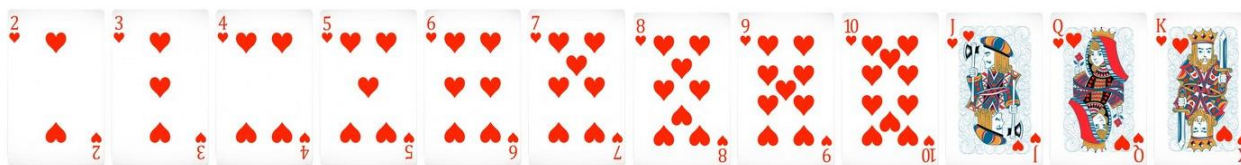


En un experimento aleatorio es necesario que su espacio muestral esté bien definido, como cuando participas en una rifa o sorteo, pues existe un número total de boletos; también cuando juegas buscaminas, lotería o algún otro juego, por ejemplo, se va a rifar un electrodoméstico entre 20 personas, cada una de

ellas deposita su boleto con su número de empleado en una urna, el espacio muestral {01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}, la probabilidad de que gane el boleto 5 es $P =$

$\frac{\text{Eventos favorables}}{\text{Total de eventos}} = \frac{1}{20} = 0.05$.

En una baraja se tienen 4 juegos de cartas, éstas son de corazones, espadas, diamantes y tréboles, y en cada juego de figuras se tienen 13 cartas, contando desde el as (A), del 2 al 10, hasta la jota (J), la reina (Q) y el rey (R), con estas cartas se puede definir un evento al quitar los ases (A) para dejar solamente 12 cartas. Un evento consiste en revolver las cartas de corazones y tomar una al azar, así que hay 12 posibles resultados, donde el espacio muestral es = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, R}.



La probabilidad de obtener uno de los resultados es $P = \frac{\text{Eventos favorables}}{\text{Total de eventos}} = \frac{1}{12} = 0.083$.



Supóngase que en una bolsa oscura hay 12 lápices de colores diferentes: café (C), rojo (Rj), blanco (B), verde (Ve), amarillo (Am), azul (Az), naranja (Na), morado (M), negro (Ne), gris (G), rosa (R), violeta (Vi); así que el espacio muestral = {C, Rj, B, Ve, Am, Az, Na, M, Ne, G, R, Vi}. La probabilidad de obtener uno de los resultados es $P = \frac{\text{Eventos favorables}}{\text{Total de eventos}} = \frac{1}{20} = 0.05$.

Se registraron los resultados de varias extracciones con remplazo, es decir, después de registrar el color que se sacó se devolvió a la bolsa antes de comenzar el siguiente evento, los resultados son {M, Rs, B, Az, Na, G, M, Vi, Az, G, B, Rj, Na, C, Ne, B, Vi, Am, B, M}. Se observa que:

- El número de extracciones fue 20;

- El color Ve (verde) nunca salió;
- Los colores con mayor frecuencia fueron B (blanco) y la M (morado).

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

5



Guía de Pensamiento matemático 5

Ecuaciones lineales

Recuerda que en el lenguaje algebraico se utilizan números y letras para expresar valores desconocidos, a las letras se les llaman literales. Cuando las literales tienen un único valor se llaman incógnitas, pero cuando pueden tomar distintos valores se llaman variables.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos cantidades o expresiones algebraicas, por ejemplo, $2x - 3 = 2x + 7$, en este caso el signo igual (=) es la expresión de igualdad o equivalencia, en álgebra su significado es de equivalencia y equilibrio. Ejemplos de ecuaciones:

a) $x + 8 = 12$ b) $y + x = 20$ c) $m - 6n = n - 15$

$$2x - 3 = x + 7$$

Binomio lado izquierdo del signo igual.

Binomio lado derecho del signo igual.

Ambos binomios son equivalentes.

Una ecuación es **lineal** cuando las variables que intervienen tienen como máximo exponente el 1, $x = x^1$, recuerda que no se ve, pero está ahí. Los ejemplos anteriores son ecuaciones lineales, la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta.

Resolver una ecuación es encontrar el valor de las variables que al sustituirse hacen que no se pierda la igualdad, por ejemplo, en $x + 3 = 4$, el valor de x es 1, pues $1 + 3 = 4$.

El **despejar la incógnita** significa dejar sola a la literal en cualquiera de los lados de la ecuación y colocar todos los números y, en su caso, otras literales, del otro lado del signo igual. Por ejemplo, en $x = m + 2y$, la x está despejada.

Una ecuación se compara con una **balanza en equilibrio**, ya que el signo igual que divide los lados derecho e izquierdo representa una equivalencia, esta comparación permite entender cómo resolver una ecuación.

Por ejemplo, $x + 7 = 10$ se vería como:



Se agregó 2 solamente al lado derecho.

Si a una balanza en equilibrio se le agrega un peso a solo un lado esta se inclina y se pierde el equilibrio, por ello durante el proceso para despejar una literal en una ecuación, la igualdad (equilibrio) entre sus lados izquierdo y derecho debe mantenerse en todo momento.

Cuando se agregue o quite algo de un platillo de la balanza debe hacerse en ambos lados para mantener la igualdad.



Algebraicamente se escribe como:

$$\begin{aligned} x + 7 &= 10 \\ x + 7 + 2 &= 10 + 2 \end{aligned}$$

Al resolver $x + 7 = 10$



Se resta a ambos lados 7



Algebraicamente: $x + 7 - 7 = 10 - 7$

Se despeja la variable x



$$x = 3$$

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $5 + x = 16$
 $5 + x - 5 = 16 - 5$
 $x = 11$

b) $x - 9 = 12$
 $x - 9 + 9 = 12 + 9$
 $x = 21$

c) $x + 6 = 9$
 $x + 6 - 6 = 9 - 6$
 $x = 3$

En una ecuación la igualdad no se altera si se:

- suma o resta a ambos lados la misma cantidad,
- multiplica o divide a ambos lados por la misma cantidad.

Se resta a ambos lados $4x$.

Se divide entre 2 a ambos lados.

Ejemplo a)
 $6x = 4x + 8$
 $6x - 4x = 4x + 8 - 4x$
 $2x = 8$
 $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$
 $x = 4$

Ejemplo b)
 $3m + 2 = 4 + m$
 $3m + 2 - m = 4 + m - m$
 $2m + 2 = 4$
 $2m + 2 - 2 = 4 - 2$
 $2m = 2$
 $\frac{2m}{2} = \frac{2}{2}$
 $m = 1$

Se resta a ambos lados m .

Se resta a ambos lados 2.

Se divide entre 2 a ambos lados.

Ejemplo b)
 $8y - 5 = 7y + 4$
 $8y - 5 - 7y = 7y + 4 - 7y$
 $y - 5 = 4$
 $y - 5 + 5 = 4 + 5$
 $y = 9$

Problemas a partir de una ecuación

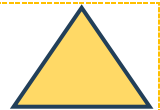
1. Calcular el perímetro del triángulo equilátero.

Planteamiento

P = perímetro = lado + lado + lado

x = lado de un triángulo equilátero, $3x$ = tres veces el lado del triángulo

$P = 3x$



2. Julieta compró tres paquetes de tortillas de harina, pagó con un billete de \$100 pesos y recibió \$40 de cambio. ¿Cuánto le costó cada paquete?

Planteamiento

x = un paquete de tortillas

$3x$ = tres veces el precio de cada paquete

Al pagar con un billete de \$100 pesos y obtener \$40 de cambio indica que las tortillas costaron $100 - 40$ pesos.

Entonces, la ecuación es: $3x = 100 - 40$

Resolución

$3x = 100 - 40$

$3x = 60$

$\frac{3x}{3} = \frac{60}{3}$

$x = 20$

Cada paquete costó \$20.

3. Juan compró 3 escobas, 2 recogedores y 4 trapeadores, y en total gastó \$157, ¿cuál es la ecuación que representa el problema?

Planteamiento

x = precio de una escoba, entonces $3x$ = precio de tres escobas,

y = precio de un recogedor, luego $2y$ = precio de dos recogedores,

z = precio de un trapeador, así que $4z$ = precio de cuatro trapeadores.

El costo total es de $3x + 2y + 4z$ igual a 157 pesos, la ecuación es $3x + 2y + 4z = 157$.

4. Eva desea calcular el largo y el ancho de su libreta, pero no cuenta con una regla. Sin embargo, observa que en la cubierta de la libreta está escrito que tiene un área de 420 cm^2 . ¿Cuál ecuación representa este problema?

Planteamiento

x = altura de la libreta, y = ancho de la libreta, A = área total es altura por el ancho = xy

$A = 420 \text{ cm}^2$ La ecuación es $xy = 420$.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas



David compró una bolsa de paletas y bolsa de chiclosos, en total pagó 150 pesos, pero desconoce el precio de cada bolsa. Si “x” representa el precio de la bolsa de paletas y “y” el precio de la bolsa de chiclosos entonces gastó $x + y$, lo que es equivalente a \$150, es decir la ecuación que representa esta compra es $x + y = 150$. Las soluciones de esta ecuación son varias, por ejemplo, $x = 20$, $y = 120$; $x = 80$, $y = 70$, etc. David no puede saber el precio de cada

bolsa.

A la siguiente semana fue de nuevo a la misma tienda, donde los precios no habían cambiado, esta vez compró dos bolsas de paletas y una de chiclosos y el gasto total fue de \$250, esta nueva compra tiene la ecuación de $2x + y = 250$. Ahora David tiene dos ecuaciones con dos incógnitas: $x + y = 150$, $2x + y = 250$.

Un **sistema de ecuaciones** es el conjunto de dos o más ecuaciones que resultan de una situación problemática que se busca resolver, un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un sistema de ecuaciones con dos ecuaciones lineales (todas sus literales tienen como exponente uno) con las mismas dos incógnitas en ambas ecuaciones y el sistema debe compartir un valor para cada literal que las resuelve. Dar solución a un sistema de ecuaciones consiste en encontrar los valores de x y de y que dan solución a todas las ecuaciones que lo componen.

En un sistema de ecuaciones, éstas tienen las mismas variables:

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 2x + y = 250 \end{cases}$$


Ejemplo: Lulú tiene \$800 en billetes de \$100 y \$50. Si en total contó 11 billetes, ¿cuál sistema de ecuaciones resulta de esta situación?

Si “x” es el número de billetes de \$100 y “y” es el número de billetes de a \$50, se tiene que la cantidad de dinero es $100x + 50y$ equivalente a 800, es decir, $100x + 50y = 800$, además son 11 billetes esto es $x + y = 11$, así que el sistema es

$$100x + 50y = 800; x + y = 11.$$

Para solucionar un sistema de ecuaciones existen varios métodos: suma y resta, sustitución, graficación, entre otros.

Método de suma y resta para resolver sistemas de ecuaciones lineales, este consiste en sumar las dos ecuaciones con el fin de que una de las incógnitas involucradas se elimine y se obtenga una ecuación con una incógnita; para que se lleve a cabo la eliminación es necesario que la incógnita en ambas ecuaciones cuente con el mismo coeficiente pero con signos contrarios, si esta condición no se presenta entonces se multiplica una de las ecuaciones por el número correcto que crea esta circunstancia. Se explica por medio de dos ejemplos.

a)

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 2x + y = 250 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ecuación 1 (1)} \\ \text{Ecuación 2 (2)} \end{array}$$

Se identifica cada ecuación con un número.

b)

$$\begin{cases} 100x + 50y = 800 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Paso 1 Se identifica cuál de las dos incógnitas conviene eliminar.

En este caso se elige la “y”, ya que tiene el mismo coeficiente en las ecuaciones, solamente se multiplica la ecuación (2) por el número -1, para que la “y” quede con el mismo coeficiente, pero con el signo contrario.

$$\begin{array}{rcl} x + y = 150 & (1) \\ (-1)(2x + y = 250) & (2) \end{array}$$

En este caso se elige la “x”, solamente se multiplica la ecuación (2) por el número -100, para que la “x” quede con el mismo coeficiente, pero con el signo contrario.

$$\begin{array}{rcl} 100x + 50y = 800 & (1) \\ (-100)(x + y = 11) & (2) \end{array}$$

Paso 2 Al multiplicar la ecuación resulta una nueva ecuación, que se llamará ecuación (3).

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 150 \quad (1) \\ -2x - y & = & -250 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 100x + 50y & = & 800 \quad (1) \\ -100x - 100y & = & -1100 \quad (3) \end{array}$$

Paso 3 Ahora se suman las ecuaciones (1) y (3).

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 150 \quad (1) \\ -2x - y & = & -250 \quad (3) \\ \hline -x & = & -100 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 100x + 50y & = & 800 \quad (1) \\ -100x - 100y & = & -1100 \quad (3) \\ \hline -50y & = & -300 \end{array}$$

Paso 4 A continuación, de la ecuación resultante se despeja la variable y se obtiene su valor.

$$\begin{array}{l} -x = -100 \\ x = (-100)/(-1) \\ \mathbf{x = 100} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -50y = -300 \\ y = (-300)/(-50) \\ \mathbf{y = 6} \end{array}$$

Paso 5 Después, se sustituye el valor de la variable en una de las ecuaciones 1 o 2, y se resuelve.

Se sustituye $x = 100$ en la ecuación 1.

$$\begin{array}{l} x + y = 150 \\ 100 + y = 150 \\ y = 150 - 100 \\ \mathbf{y = 50} \end{array}$$

Se sustituye $y = 6$ en la ecuación 2.

$$\begin{array}{l} x + y = 11 \\ x + 6 = 11 \\ x = 11 - 6 \\ \mathbf{x = 5} \end{array}$$

Para comprobar si los valores de “x” y de “y” resuelven el sistema de ecuaciones, se sustituyen en las ecuaciones originales (1) y (2).

$$\begin{array}{l} x + y = 150 \\ 100 + 50 = 150 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + y = 250 \\ 2(100) + 50 = 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100x + 50y = 800 \\ (100)(5) + (50)(6) = 800 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y = 11 \\ 5 + 6 = 11 \end{array}$$

Método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales, este consiste en elegir una ecuación de la cual se despeja una de las incógnitas y se sustituye en la segunda ecuación, para luego resolver. Se explica por medio de los dos mismos ejemplos.

a)

$$\left[\begin{array}{rcl} x + y & = & 150 \quad (1) \\ 2x + y & = & 250 \quad (2) \end{array} \right.$$

b)

$$\left[\begin{array}{rcl} 100x + 50y & = & 800 \quad (1) \\ x + y & = & 11 \quad (2) \end{array} \right.$$

Paso 1 Se elige una ecuación, de la cual se despeja una de las incógnitas. A esta nueva ecuación se le llamará ecuación (3).

En este caso, se despejará la y de la ecuación (1).

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 150 \\ y & = & 150 - x \quad (3) \end{array}$$

En este caso, se despejará la x de la ecuación (2).

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 11 \\ x & = & 11 - y \quad (3) \end{array}$$

Paso 2 A continuación, se sustituye la ecuación 3 en la ecuación de la cual no se ha despejado todavía ninguna variable.

Se sustituye $y = 150 - x$ en la ecuación (2).

$$\begin{aligned} 2x + y &= 250 \\ 2x + (150 - x) &= 250 \end{aligned}$$

Se sustituye $x = 11 - y$ en la ecuación (1).

$$\begin{aligned} 100x + 50y &= 800 \\ 100(11 - y) + 50y &= 800 \end{aligned}$$

Paso 3 Después se despeja la incógnita de la ecuación 3 para calcular el valor de la incógnita.

$$\begin{aligned} 2x + (150 - x) &= 250 \\ 2x + 150 - x &= 250 \\ x + 150 &= 250 \\ x &= 250 - 150 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 100(11 - y) + 50y &= 800 \\ 1100 - 100y + 50y &= 800 \\ 1100 - 50y &= 800 \\ -50y &= 800 - 1100 \\ -50y &= -300 \\ y &= (-300)/(-50) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{6} \end{aligned}$$

Paso 4 Se sustituye el valor encontrado en la ecuación 3.

$$\begin{aligned} y &= 150 - x \\ y &= 150 - (100) \\ y &= 150 - 100 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{50} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 11 - y \\ x &= 11 - 6 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

Igual que en el método anterior se comprueban los valores de “x” y de “y” para saber si resuelven el sistema de ecuaciones.

Así que, a) a David la bolsa de paletas le costó \$100 y la bolsa de chiclosos \$50; b) Lulú tiene 5 billetes \$100 y 6 de billetes de \$50.

Ejemplos:

1. Ana compró un kilogramo de arroz y un kilogramo de frijol y pagó \$70.00. Se sabe que el kilogramo de arroz es \$10.00 más barato que el de frijol, ¿cuánto cuesta el kilogramo de arroz y cuánto el de frijol?

R. Si tomamos a “x” como el precio del kilo de frijol y a “y” como el precio del kilo de arroz, entonces la suma $x + y$ equivale a \$70, es decir, $x + y = 70$. Por otro lado, ya que el kilogramo de arroz es \$10.00 más barato que el de frijol entonces $x - y = 10$.

El sistema de ecuaciones es $x + y = 70$, $x - y = 10$, se usará el método de suma y resta.

$$\begin{aligned} x + y &= 70 & (1) \\ x - y &= 10 & (3) \\ \hline 2x &= 80 \\ x &= 80/2 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{40} \end{aligned}$$

(1)
(3)

Sustituyendo $x = 40$ en 1

$$\begin{aligned} x + y &= 70 \\ 40 + y &= 70 \\ y &= 70 - 40 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{30} \end{aligned}$$

El kilogramo de frijol vale \$40 y el kilogramo de arroz \$30.

2. Emilio vende utensilios de limpieza, le vendió a una clienta 3 escobas y 2 recogedores por \$ 270.00. A otra clienta le cobró \$285.00 por 4 escobas y 1 recogedor, ¿cuánto cuesta cada escoba y cuánto cada recogedor?

R. Si tomamos a “x” como el precio de una escoba y a “y” como el precio de un recogedor, entonces la ecuación que representa la compra de la primera clienta es $3x + 2y = 270$; la ecuación que representa la compra de la segunda clienta es $4x + y = 285$. El sistema de ecuaciones es $3x + 2y = 270$, $4x + y = 285$, se usará el método de sustitución.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 270 & (1) \\ 4x + y &= 285 & (2) \end{aligned}$$

Se despeja “y” de la ecuación 2.

$$\begin{aligned} 4x + y &= 285 \\ y &= 285 - 4x & (3) \end{aligned}$$

Se sustituye (3) en (1)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 270 \\ 3x + 2(285 - 4x) &= 270 \\ 3x + 570 - 8x &= 270 \\ 3x - 8x &= 270 - 570 \\ -5x &= -300 \\ x &= (-300)/(-5) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{60} \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 60$ en (3)

$$\begin{aligned} y &= 285 - 4x \\ y &= 285 - 4(60) \\ y &= 285 - 240 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{45} \end{aligned}$$

Cada escoba vale \$60 y cada recogedor \$45.

Método gráfico para resolución de ecuaciones

Recuerda que la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta.

Si al graficar las dos ecuaciones en un sistema de ecuaciones lineales se tiene que las dos rectas no se cruzan, entonces no hay solución; si son la misma recta, entonces hay infinitas soluciones; pero si no son paralelas, es decir, que en algún punto se cruzan entre sí, entonces tienen una única solución.

Método gráfico para resolución de ecuaciones consiste en graficar las dos ecuaciones en un mismo plano y encontrar la coordenada en que las rectas se cruzan, pues esa coordenada nos da la solución del sistema.

Resolver por el método gráfico el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \text{Ecuación 1 (1)} \\ x + y = 2 & \text{Ecuación 2 (2)} \end{cases}$$

Paso 1 Se despeja la “y” de las ecuaciones del sistema. A las ecuaciones resultantes se les conoce como ecuaciones de las rectas.

$$\begin{aligned} \text{Ecuación 1} \\ 2x + y &= 3 \\ y &= -2x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ecuación 2} \\ x + y &= 2 \\ y &= -x + 2 \end{aligned}$$

Paso 2 Se asignan valores arbitrarios a “x” en cada ecuación y se calcula el valor de “y”.

Recuerda que para graficar una recta con dos coordenadas es necesario.

Ecuación 1

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{Si } x &= 3 \\ y &= -2x + 3 = (-2)(3) + 3 = -6 + 3 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

(3, -3)

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{Si } x &= -3 \\ y &= -2x + 3 = (-2)(-3) + 3 = 6 + 3 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

(-3, 9)

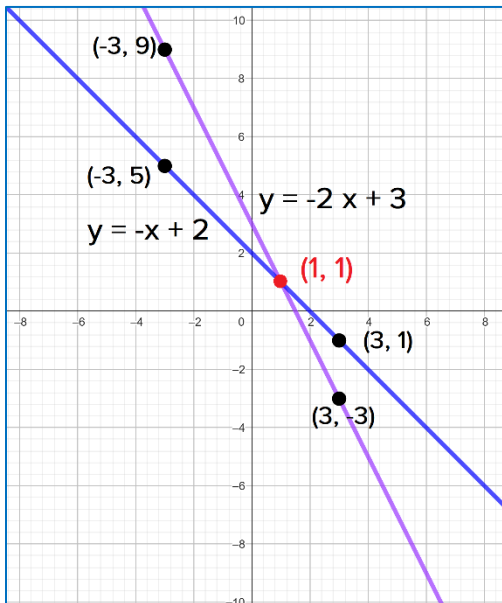
Ecuación 2

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{Si } x &= 3 \\ y &= -x + 2 = -3 + 2 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

(3, -1)

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{Si } x &= -3 \\ y &= -x + 2 = -(-3) + 2 \\ y &= 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

(-3, 5)



Paso 3 Se grafican las rectas en un mismo plano.

Paso 4 Se localizan las coordenadas del punto donde las dos rectas se cruzan.

Las rectas se cruzan en la coordenada (1, 1), así que la solución es **x = 1, y = 1**.

Para comprobar si los valores de “x” y de “y” resuelven el sistema de ecuaciones, se sustituyen en las ecuaciones originales (1) y (2).

$$\begin{array}{ll} 2x + y = 3 & x + y = 2 \\ 2(1) + 1 = 3 & 1 + 1 = 2 \\ 2 + 1 = 3 & 2 = 2 \\ 3 = 3 & \end{array}$$

Ejemplo: Leticia compró 2 jabones de baño y 3 bolsas de jabón de ropa, pagó \$130 por todo. Al día siguiente escuchó que 4 jabones de baño cuestan lo mismo que una bolsa de jabón de ropa más \$50. ¿Cuánto cuesta cada tipo de jabón?

Si “x” es el precio de un jabón de baño y “y” es el precio de una bolsa de jabón de ropa, entonces la ecuación que representa la compra de Leticia es $2x + 3y = 130$. La ecuación que representa que 4 jabones de baño cuestan lo mismo que una bolsa de jabón de ropa más \$50 es $4x = y + 50$.

Se despeja la “y” de las ecuaciones del sistema.

$$\begin{aligned} 1) \quad 2x + 3y &= 130 \\ 3y &= 130 - 2x \\ y &= \frac{130 - 2x}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 4x &= y + 50 \\ 4x - 50 &= y \\ y &= 4x - 50 \end{aligned}$$

Se asignan los valores de $x = 10$ y $x = 30$.

$$1) \quad y = \frac{130 - 2(10)}{3} = \frac{130 - 20}{3} = \frac{110}{3} = 36.66,$$

$$y = \frac{130 - 2(30)}{3} = \frac{130 - 60}{3} = \frac{70}{3} = 23.33,$$

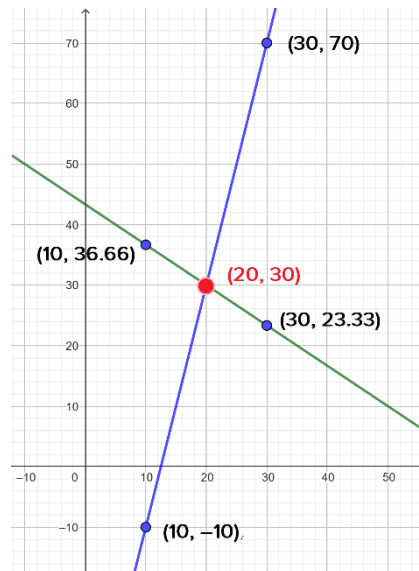
Los puntos son: (10, 36.66), (30, 23.33)

$$2) \quad y = 4(10) - 50 = 40 - 50 = -10$$

$$y = 4(30) - 50 = 120 - 50 = 70$$

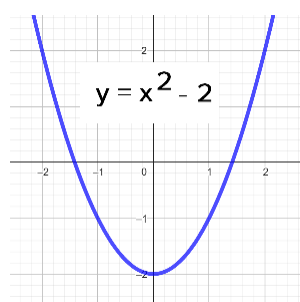
Los puntos son: (10, -10), (30, 70)

La solución es
 $x = 20, y = 30$.



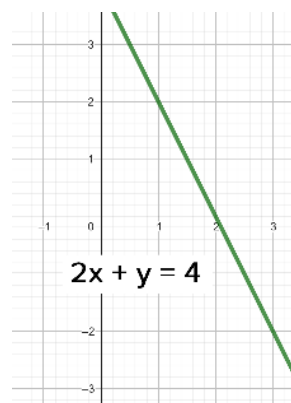
Ecuaciones cuadráticas

El grado de las ecuaciones depende del exponente más grande que tienen sus variables. Cuando el exponente más grande de cualquiera de las literales es el uno, se dice que la ecuación es lineal o de primer grado, por ejemplo, $2x + y = 4$, cuando se grafica resulta una línea recta.



Cuando el exponente más grande de cualquiera de las literales de una ecuación es 2, se dice que la **ecuación es cuadrática o de segundo grado**, ejemplo $y = x^2 - 2$, cuando se grafica una ecuación cuadrática el dibujo que resulta es una curva.

Para identificar una ecuación cuadrática y cada uno de sus componentes debe igualarla a cero, para ellos todos los elementos de la ecuación se pasan al lado izquierdo de la igualdad y se deja un cero del lado derecho.



Por ejemplo:

a) en la ecuación $2x^2 = -5x + 12$, se deben pasar a la izquierda los términos “ $-5x$ ” y “12”, igualmente que en las lineales se pasan con signo contrario.

$$\begin{aligned} 2x^2 &= -5x + 12 \\ 2x^2 + 5x - 12 &= -5x + 12 + 5x - 12 \\ 2x^2 + 5x - 12 &= 0 \end{aligned}$$

b) en la ecuación $9y - \sqrt{y^2} = 12$, se debe de eliminar la raíz con la potencia de dos.

$$\begin{aligned} 9y - \sqrt{y^2} &= 12 \\ 9y - y &= 12 \\ 8y &= 12 \end{aligned}$$

La ecuación es lineal.

Recuerda, cuando se obtiene la raíz de una potencia, se divide el exponente entre el índice de la raíz.

Por ejemplo:

$$\sqrt{x^6} = (x^6)^{\frac{1}{2}} = x^{6 \div 2} = x^3$$

Todas las ecuaciones cuadráticas se igualan a cero para ser identificadas. Pueden presentarse en tres formas distintas, y las tres indican que se trata de una ecuación cuadrática.

1. Forma completa de una ecuación cuadrática.

Esta forma completa tiene tres monomios:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde “a” es el coeficiente de la x^2 ; la “b” es el coeficiente de la x lineal y la “c” es el llamado término independiente (porque no acompaña a ninguna variable).

Ejemplos:

a) $-5x^2 - 8x = 0$, donde $a = -5$, $b = -8$, $c = 0$

b) $x^2 - x = 0$, donde $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$

Ejemplos:

a) $12x^2 + 3x + 4 = 0$, donde $a = 12$, $b = 3$, $c = 4$

b) $3x^2 - x + 5 = 0$, donde $a = 3$, $b = -1$, $c = 5$

2. Forma de la ecuación cuadrática sin el término independiente.

Esta forma no tiene el término independiente:

$$ax^2 + bx = 0.$$

Forma de ecuación cuadrática sin término lineal.

Se presenta cuando no se tiene la variable lineal (la que está elevada al exponente 1):

$$ax^2 + c = 0.$$

Ejemplos:

a) $x^2 - 4 = 0$, donde $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$

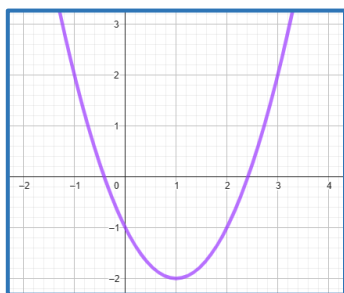
b) $-7x^2 + 2 = 0$, donde $a = -7$, $b = 0$, $c = 2$

Un método para resolver cualquier ecuación cuadrática es la llamada **fórmula general**, para resolver la ecuación basta con sustituir en ella los valores de a, b y c de cualquier ecuación cuadrática y realizar las operaciones.

Observa que $\sqrt{16} = \pm 4$, pues $(4)(4) = 16$ y $(-4)(-4) = 16$

Fórmula general para resolver cuadráticas

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Todas las ecuaciones cuadráticas tienen **dos posibles soluciones**, esto se puede observar en su gráfica, pues la curva atraviesa dos veces el eje de las x. Hay ecuaciones de segundo grado para las cuales una o sus dos soluciones no son aplicables en los números reales.

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática $3x^2 = 6x + 9$.

Primero se debe llevar la ecuación a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Entonces $3x^2 = 6x + 9$ equivale a $3x^2 - 6x - 9 = 0$, así que $a = 3$, $b = -6$, $c = -9$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-9)}}{2(3)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

$$x_1 = \frac{6 + 12}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{6 - 12}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Para comprobar, se sustituyen los valores de $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$ en la ecuación original: $3x^2 - 6x - 9 = 0$
Si $x = 3$, $3(3)^2 - 6(3) - 9 = 3(9) - 18 - 9 = 27 - 27 = 0$; Si $x = -1$, $3(-1)^2 - 6(-1) - 9 = 3(1) + 6 - 9 = 3 - 3 = 0$

A la **primera solución** se le identifica con x_1 y se utiliza el signo más (+) para calcularla a partir de la fórmula:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mientras que a la **segunda solución** se le identifica con x_2 y se utiliza el signo menos para calcularla a partir de la fórmula:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos:

a) Alejandra compró varios monederos para sus amigas, en total pagó \$1200.00. No se sabe cuántos compró, pero en la tienda de a lado los mismos monederos cuestan \$ 20.00 menos y si hubiera comprado ahí, por los mismos \$1200 habría comprado 3 más. ¿Cuántos monederos compró Alejandra?

Primero se denota a "x" como el número de monederos que compró. Cada monedero le costó $\frac{1200}{x}$.

En la tienda de a lado entonces cada monedero cuesta \$20 menos, es decir, $\frac{1200}{x} - 20$.

Además, con \$1200 se ajustan 3 más, es decir hubiera comprado $x + 3$ monederos.

Entonces en la tienda de a lado en $x + 3$ monederos a $\frac{1200}{x} - 20$, se hubiera gastado \$1200, esto en una ecuación es igual a $(x + 3) \left(\frac{1200}{x} - 20 \right) = 1200$.

Para resolver la ecuación primero se multiplica por "x" a ambos lados:

$$x(x + 3) \left(\frac{1200}{x} - 20 \right) = 1200x$$

La "x" se distribuye en el segundo binomio, pues conviene para eliminar la x que esta como denominador.

$$(x + 3)x \left(\frac{1200}{x} - 20 \right) = 1200x$$

$$(x + 3) \left(\frac{1200x}{x} - 20x \right) = 1200x$$

Se multiplican los binomios y se resta de ambos lados 1200x.

$$(x + 3)(1200 - 20x) = 1200x$$

$$1200x - 20x^2 + 3600 - 60x = 1200x$$

Se divide entre -20 a ambos lados.

$$\begin{aligned} -20x^2 + 3600 - 60x &= 0 \\ x^2 - 180 + 3x &= 0 \end{aligned}$$

Se usará la formula general, nótese que a = 1, b = 3, c = -180

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-180)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 720}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 27}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

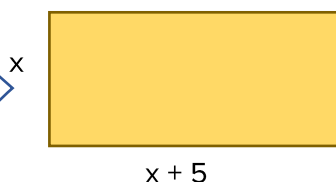
$$x_2 = \frac{-3 - 27}{2} = \frac{-30}{2} = -15$$

Esta solución al ser negativa no es válida para el problema.

La solución es $x = 12$, es decir, Alejandra compró 12 monederos.

b) Un terreno mide 266 m^2 de área, se sabe que el largo es 5 metros más grande que el ancho. ¿Cuál es el modelo que resuelve la ecuación?, y ¿cuál es su solución?

Si "x+ 5" es la medida del largo de dicho terreno entonces el ancho será "x".



El área de un rectángulo es igual a base por altura, de este modo la ecuación es $x(x + 5) = 266$.

Ahora se multiplican los binomios: $x(x + 5) = x^2 + 5x = 266$, de aquí que $x^2 + 5x - 266 = 0$.

Para resolver por medio de la fórmula general identificamos que $a = 1$, $b = 5$ y $c = -266$.
Entonces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(-266)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1064}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{-5 \pm 33}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 33}{2} = \frac{28}{2} = 14 \quad x_2 = \frac{-5 - 33}{2} = \frac{-38}{2} = -19$$

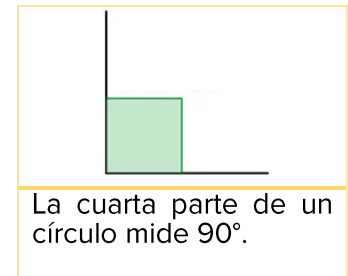
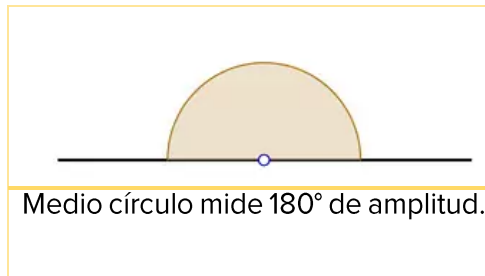
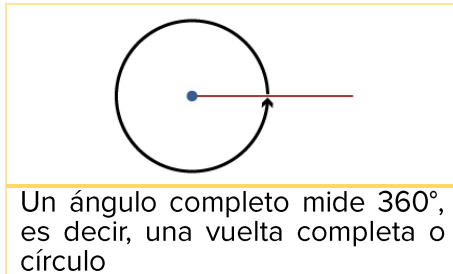
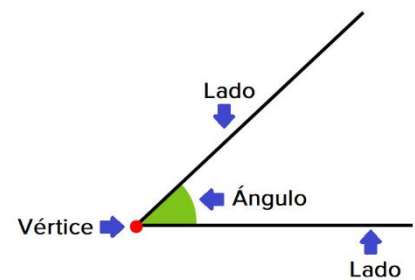
La solución 2, $x = -19$, no es válida para este problema, no hay distancias negativas, la solución es $x = 14$, así que el terreno mide 14 m de largo y 19 de ancho.

El triángulo rectángulo

Un **ángulo** es el espacio entre dos rectas unidas por un punto, así que un ángulo se forma a partir de la intersección de dos rectas o segmentos de recta que comparten un punto en común. A este punto se le conoce como **vértice** del ángulo.

A las rectas que forman un ángulo se les conoce como **lados del ángulo**. La medida de un ángulo no depende de la longitud de sus lados sino del espacio (apertura) entre las rectas.

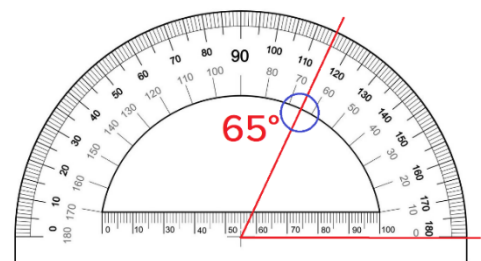
La unidad más utilizada para medir ángulos es el **grado sexagesimal**.



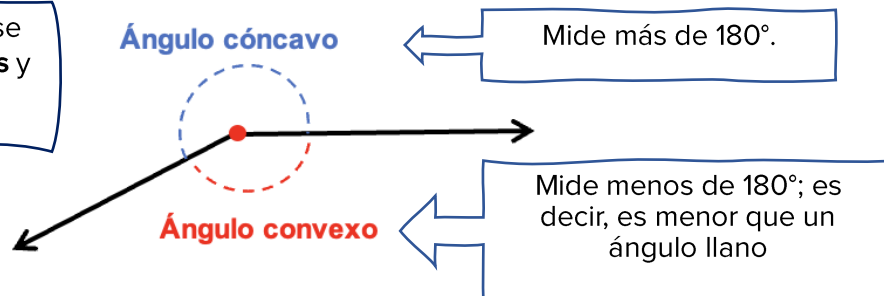
Para medir ángulos usualmente se utiliza un **transportador**.

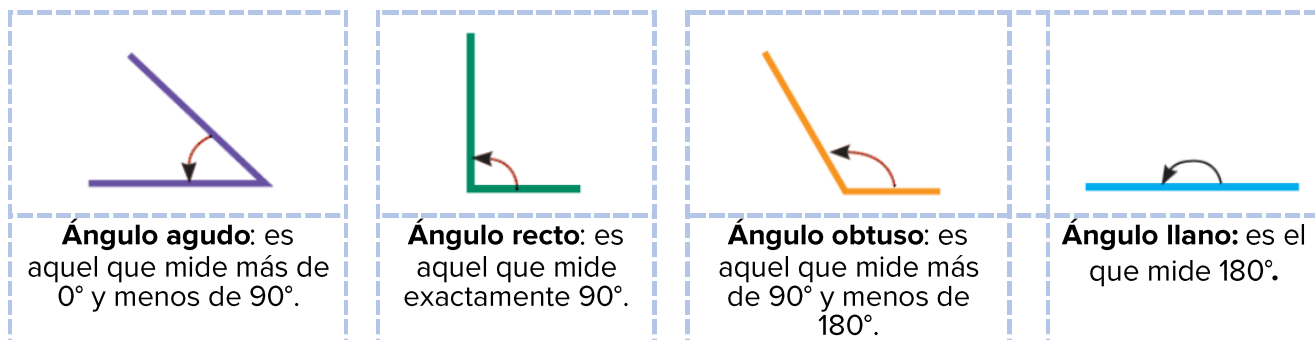
En la figura se mide un ángulo que miden 65 grados, para medir se empieza por el lado derecho (0°) y contando hacia la izquierda (en la dirección contraria a las manecillas del reloj).

En función de sus medidas los ángulos pueden ser agudo, recto y obtuso.



Los ángulos también se clasifican por **convexos** y **cóncavos**.



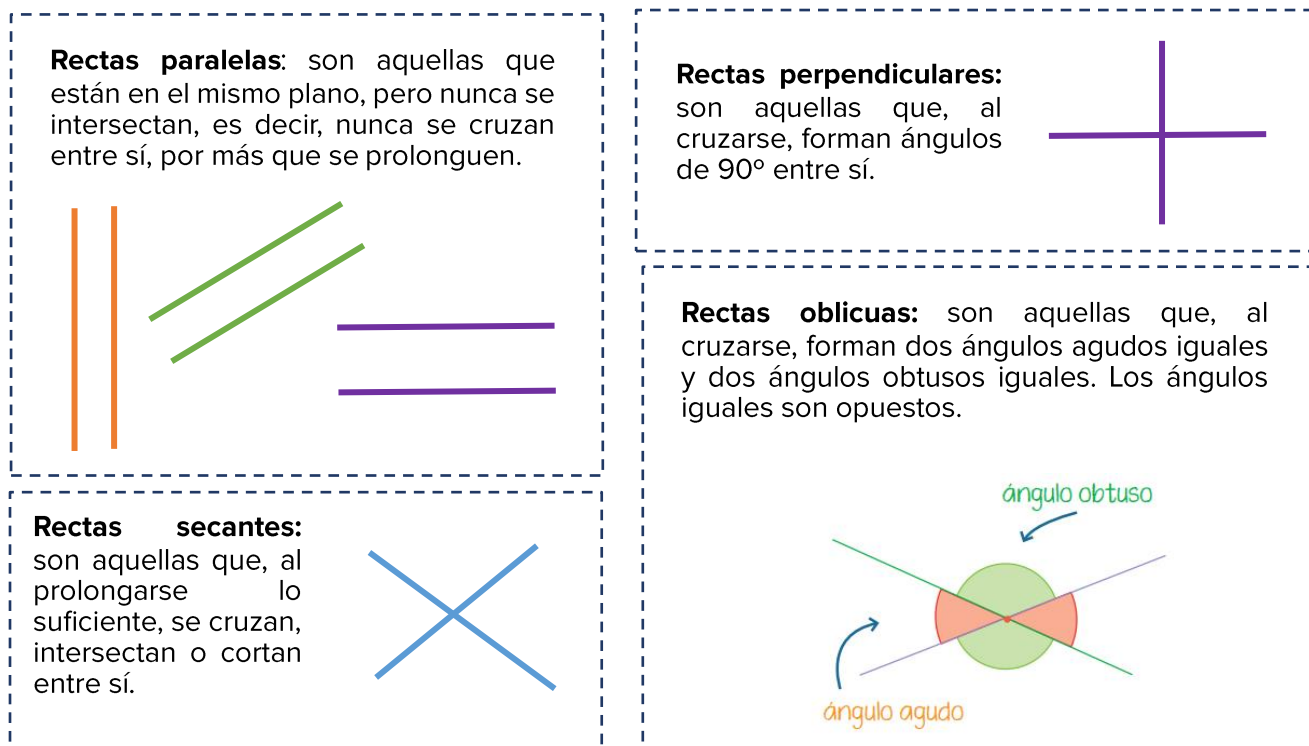


Una **línea recta** no tiene ninguna curvatura y no tiene principio ni fin porque se extiende hasta el infinito.

Un **segmento de recta** tiene una longitud determinada (tienen principio y fin).

Una línea recta mantiene constante su inclinación, a la cual también se le conoce con el nombre de **pendiente**.

Hay distintos tipos de rectas de acuerdo con su posición con respecto a otra, las líneas rectas se clasifican en **paralelas** y **secantes**.



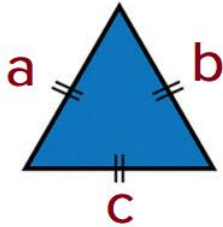
Un **triángulo** es una figura geométrica o un polígono de tres lados. Los puntos donde los lados de un polígono se cortan o tocan se conocen con el nombre de **vértices**.

En geometría, los triángulos se representan con el símbolo Δ . Los triángulos se clasifican según el número de lados y de acuerdo con las medidas de sus ángulos.

Clasificación de los triángulos según el número de lados

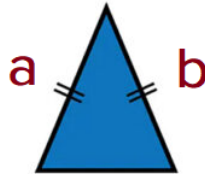
Triángulo equilátero: sus tres lados miden lo mismo.

$$a = b = c$$



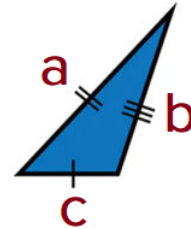
Triángulo isósceles: tiene dos lados iguales y uno desigual.

$$a = b$$



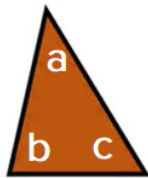
Triángulo escaleno: tiene los tres lados desiguales.

$$a \neq b \neq c$$

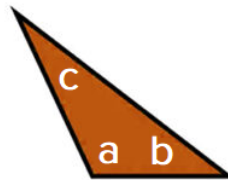


Clasificación de los triángulos según las medidas de sus ángulos

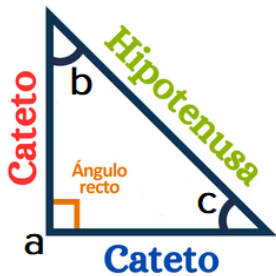
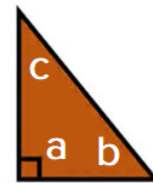
Triángulo acutángulo: tiene todos sus ángulos agudos. Ángulos a , b y c menores de 90° .



Triángulo obtusángulo: tiene un ángulo obtuso. Ángulo a mayor de 90° .



Triángulo rectángulo: tiene un ángulo recto. Ángulo $a = 90^\circ$.



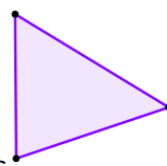
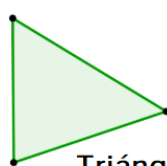
Un triángulo rectángulo puede ser isósceles o escaleno. Sin importar en cuál de las dos clasificaciones se encuentren, los triángulos rectángulos son muy útiles ya que tienen ciertas características especiales, por ejemplo, la suma de sus dos ángulos agudos es igual a 90° .

Los lados de un triángulo rectángulo reciben nombres especiales. Así, los lados que forman el ángulo recto se conocen con el nombre de **catetos**, estos son perpendiculares entre sí. El lado que está enfrente del ángulo recto recibe el nombre de **hipotenusa**.

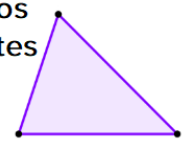
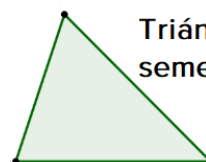
Semejanza de triángulos

En geometría, cuando dos figuras tienen la misma forma se dice que son **semejantes**, pueden tener tamaños distintos, es decir, basta con que tengan la misma forma independientemente de su tamaño. Para que dos o más triángulos sean semejantes, sus lados correspondientes deben ser proporcionales y sus ángulos iguales, en sí, deben tener la misma forma sin importar su tamaño.

Se dice que son **congruentes** si además de su forma comparten el mismo tamaño, es decir, dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño.

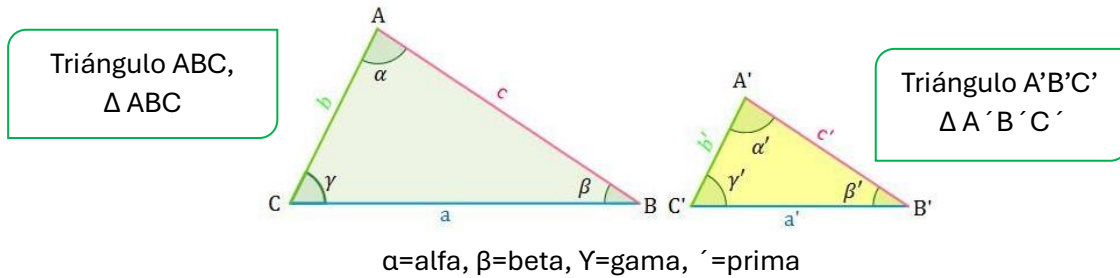


Triángulos congruentes



Triángulos semejantes

Por convención, los vértices se nombran con letras mayúsculas, los lados con letras minúsculas y los ángulos con letras griegas, por ejemplo:
De acuerdo con las características de sus lados, se clasifican en:



Las letras A', B' y C' se leen como "A prima", "B prima" y "C prima". Lo mismo ocurre con las letras griegas si les agregas este símbolo. Por ejemplo, α' se lee como "alfa prima".

Los ángulos correspondientes de dos triángulos semejantes son iguales entre sí. Por ello, para estos dos triángulos se cumple que: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, es decir, los ángulos α y α' , β y β' , γ y γ' son iguales entre sí.

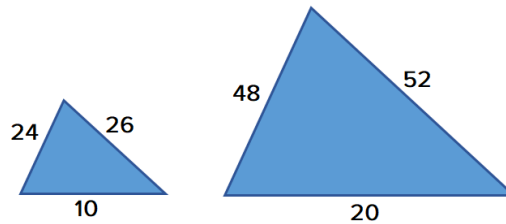
También los lados correspondientes de los triángulos son también proporcionales entre sí, esto significa que, al dividir cualquier lado del primer triángulo entre su lado correspondiente del segundo triángulo, siempre se obtiene el mismo resultado:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

En este caso, r representa la razón de semejanza, los lados de los triángulos aumentan en la misma proporción o razón.

Los triángulos son semejantes pues las razones son iguales:

$$\frac{24}{48} = \frac{26}{52} = \frac{10}{20} = 0.5$$



Ejemplos: Si en cada inciso los dos triángulos son semejantes, calcular los valores que se desconocen.

a)

Se tiene que al ser semejantes las razones son iguales:

$$\frac{12}{8} = \frac{9}{6} = \frac{15}{x}$$

Ya que $\frac{12}{8} = 1.5$, entonces también $\frac{15}{x} = 1.5$

Se multiplica a ambos lados por " x ", entonces

$$(x) \left(\frac{15}{x} \right) = (x)(1.5)$$

$$15 = 1.5x$$

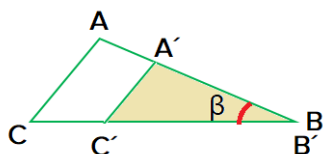
$$x = \frac{15}{1.5} = 10$$

b)

Ya que los triángulos son semejantes las razones son iguales:

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{x}{x}$$

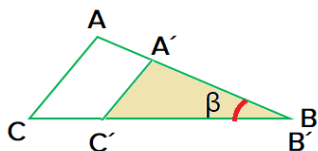
Al ser $\frac{4}{2} = 2$, entonces $\frac{x}{x} = 2$, de donde $x = 1$.



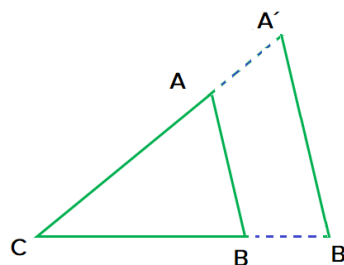
Para trazar un triángulo semejante a uno que ya se tiene, se puede trazar el nuevo triángulo dentro del original, se elige uno de los lados del triángulo inicial, por ejemplo, el lado AC. Después se dibuja una línea paralela a la misma llamada A'C'.

Ahora se tienen dos triángulos con todos sus ángulos correspondientes iguales (estos triángulos tienen la misma forma, más no el mismo tamaño), es decir, los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes entre sí.

El teorema de Tales de Mileto sobre la semejanza de triángulos indica que cada vez que se dibuja una línea paralela a uno de los lados de un triángulo se forma otro triángulo semejante. El nuevo triángulo que se formó puede estar dentro del triángulo original o puede estar fuera. Si el nuevo triángulo está dentro, es una reducción del triángulo original y si está fuera, es una ampliación.



Se produjo una reducción



Se produjo una ampliación

Hay distancias y alturas que son inaccesibles para medirlas, no se pueden usar instrumentos de medición como una regla o una cinta métrica, entonces se hace uso de las propiedades de los triángulos semejantes.

Ejemplos: a) Observa la imagen que muestra la distancia entre José y el árbol y las distancias que forman un triángulo, ¿cuál es la altura del árbol?

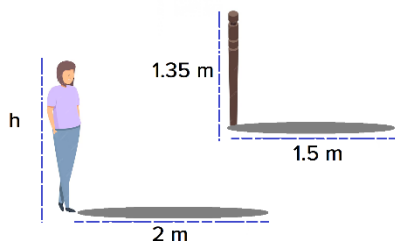
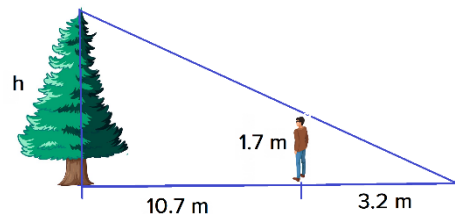
La base del triángulo pequeño es de 3.2m y su altura de 1.7 m, la base del triángulo más grande es de 13.9 m, pues 10.7 m + 3.2 m = 13.9 m.

Los dos triángulos son semejantes, así que sus razones son iguales:

$$\frac{\text{altura del árbol}}{\text{altura de José}} = \frac{\text{base del triángulo grande}}{\text{base del triángulo chico}}$$

$$\frac{h}{1.7} = \frac{13.9}{3.2}$$

Luego se tiene que $h = \frac{(1.7)(13.9)}{3.2} = \frac{23.63}{3.2} = 7.39$, así que el árbol mide 7.39 metros.



b) A cierta hora del día la altura de Ana proyecta una sombra de 2 metros, en ese mismo momento una estaca vertical de 1.35 metros de longitud proyecta una sombra de 1.5 metros. ¿Cuál es la altura de Ana?

$$\frac{\text{altura de Ana}}{\text{altura de la estaca}} = \frac{\text{sombra de Ana}}{\text{sombra de la estaca}}$$

$$\frac{h}{1.35} = \frac{2}{1.5}$$

Así que $h = \frac{(2)(1.35)}{1.5} = \frac{2.7}{1.5} = 1.8$, Ana mide 1.8 metros.

El teorema de Pitágoras

Un teorema es una proposición que, para ser considerada cierta, debe ser probada utilizando operaciones y razonamientos matemáticos generalmente aceptados.

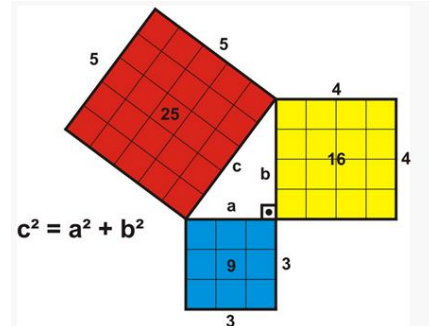
El **teorema de Pitágoras** establece una relación matemática entre las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo. El teorema solamente aplica para los triángulos rectángulos, estos tienen catetos e hipotenusa. Los lados de un triángulo rectángulo tienen denominaciones específicas, la **hipotenusa** es el lado más largo y se encuentra frente al ángulo recto, los **catetos** son los lados que forman el ángulo recto y, sin importar su longitud, siempre son más cortos que la hipotenusa.

Teorema de Pitágoras: “El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.”

$$c^2 = a^2 + b^2$$

La medida de cada cateto y de la hipotenusa en un triángulo rectángulo se representa mediante un cuadrado cuya área corresponde a la cantidad de cuadritos que equivalen a la longitud de cada lado.

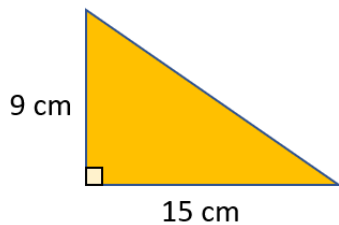
Representación gráfica del teorema de Pitágoras.



El teorema de Pitágoras es conocido desde la antigüedad, de hecho, existe un triángulo rectángulo muy particular que ha sido conocido durante miles de años, en este los catetos tienen una longitud de 3 y 4 unidades, de esta forma su hipotenusa mide 5 unidades; en este caso $5^2 = 3^2 + 4^2$; es decir, elevar al cuadrado la medida de cada lado se representa con un cuadrado de 3 x 3 (es decir, 9 cuadrados) para el cateto de 3 unidades y un cuadrado de 4 x 4 (es decir, 16 cuadrados) para el cateto de 4 unidades. Para la hipotenusa, se forma un cuadrado de 5 x 5 (es decir, 25 cuadrados).

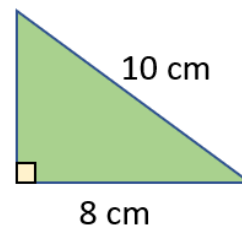
Ejemplos:

a) Calcular la medida de la hipotenusa.



En el triángulo la hipotenusa mide
 $c^2 = a^2 + b^2 = 9^2 + 15^2 = 81 + 225 = 306$
 $c = 17.49$

b) Calcular la medida del cateto.

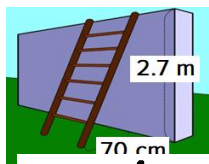


En el triángulo la hipotenusa mide 10 y un cateto 8, denotamos como “x” al cateto desconocido.
 $c^2 = a^2 + b^2$
 $10^2 = x^2 + 8^2$
 $x^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$
 $x = 6$

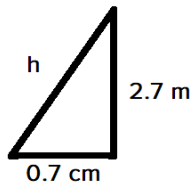
Resolución de problemas con el teorema de Pitágoras

Si se quiere resolver algún problema usando el teorema de Pitágoras debe cerciorarse que el triángulo al que se aplique sea rectángulo, es decir, tenga este un ángulo recto (90°). Además, las condiciones del problema deben formar un triángulo rectángulo y que se conozca la longitud de dos de sus lados.

Ejemplos: a) Se encuentra una escalera recargada a una pared, como se muestra en la imagen. Se necesita saber la medida de la escalera.



Primero se debe identificar que todas las medidas estén en la misma unidad de medida, la distancia de la base de la escalera a la pared es de 70 cm, es decir, de 0.7 m. Las condiciones del problema generan un triángulo rectángulo.



Justamente la altura que se desea encontrar es la hipotenusa del triángulo, así que

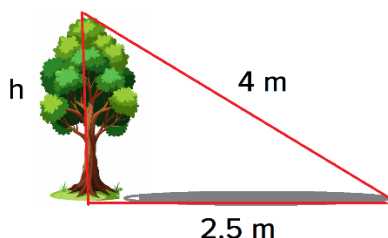
$$h^2 = a^2 + b^2 = (0.7)^2 + (2.7)^2 = 0.49 + 7.29 = 7.78$$

$$h = \sqrt{7.78} = 2.79 \text{ m}$$

La escalera mide 2.79 metros.

b) La sombra de un árbol mide 2.5 metros y de donde termina la sombra a la punta del árbol mide 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

Las condiciones del problema generan un triángulo rectángulo.



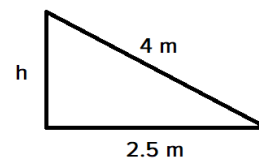
La altura que se desea encontrar es un cateto del triángulo, así que

$$4^2 = (2.5)^2 + h^2$$

$$16 = 6.25 + h^2$$

$$h^2 = 16 - 6.25 = 9.75$$

$$h = 3.12$$



La probabilidad frecuencial

La **probabilidad** es una rama de las matemáticas que estudia la posibilidad de que suceda un evento específico, mediante los experimentos aleatorios podemos analizar las posibilidades de que este ocurra cuando interviene el azar.

Probabilidad clásica



Se trabaja con datos ya obtenidos de los experimentos.



Al lanzar una moneda ya se sabe que la mitad de las veces caerá en cara y la otra mitad en águila.



Se basa en la teoría.

Probabilidad frecuencial



Se quiere saber qué tan probable es que ocurra un evento realizando el experimento.



Al lanzar una moneda no se sabe cuán probable es que caiga cara o águila, así que se lanza y se van registrando los datos.



Se basa en la práctica.

La probabilidad clásica y la probabilidad frecuencial estudian la misma probabilidad de ocurrencia de un evento, pero la probabilidad frecuencial lo hace de manera experimental.

Fórmula:

$$P(s) = \frac{S}{N}$$

Se lee: “la probabilidad que ocurra un suceso es igual a la cantidad de veces que se da dicho suceso (S) entre el número de veces que se hace el experimento (N)”.

Esta fórmula indica que la probabilidad frecuencial consiste en repetir un experimento y anotar cuántas veces cayó una moneda de un lado o del otro; en el caso de un dado, consiste en anotar cuántas veces cayó cualquiera de los seis números que tiene.

Experimentos de probabilidad frecuencial

Ahora revisaremos cómo se hace los experimentos y cómo se explica la probabilidad frecuencial. Laura y Rafael juegan lanzando una monera y un dado. Laura lanza 10 veces una moneda y registra los resultados, obtuvo 4 caras y 6 águilas. Rafael lanza un dado en 20 ocasiones y registra los resultados, obtuvo un 4 en tres ocasiones y cualquier otro número en 17 ocasiones. Sus tablas de conteo deben verse así:



Moneda	
Cara	Águila
4	6

$$P(\text{cara}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$P(\text{águila}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$$



Dado	
4	Cualquier otro número
3	17

$$P(4) = \frac{3}{20} = 0.15$$

$$P(\text{otro número}) = \frac{17}{20} = 0.85$$

Dos sucesos son igualmente probables cuando tienen la misma probabilidad de ocurrir, esto se llama **equiprobable**.

Si se hace el experimento de lanzar 30 veces una moneda al aire, $N = 30$, y registrar los resultados en una tabla de conteo, puede obtenerse lo siguiente:

Resultado	Conteo
Cara	
Águila	

Probabilidad frecuencial

$$P(\text{cara}) = \frac{17}{30} = 0.5667 = 56.67\%$$

$$P(\text{cara}) = \frac{13}{30} = 0.4333 = 43.33\%$$

Si se hace el experimento de lanzar 30 veces un dado al aire, $N = 30$, y registrar los resultados en una tabla de conteo, puede obtenerse lo siguiente:

Resultado	Cuantificación	Frecuencia
1		4
2		6
3		4
4		5
5		6
6		5

Probabilidad frecuencial

$$P(1) = \frac{4}{30} = 0.1333 = 13.33\%$$

$$P(2) = \frac{6}{30} = 0.20 = 20\%$$

$$P(3) = \frac{4}{30} = 0.1333 = 13.33\%$$

$$P(4) = \frac{5}{30} = 0.1667 = 16.67\%$$

$$P(5) = \frac{6}{30} = 0.20 = 20\%$$

$$P(6) = \frac{5}{30} = 0.1667 = 16.67\%$$

Ahora lanzamos un par de dados en 25 ocasiones ($N = 25$) y registramos los datos, observamos que obtuvimos en la suma de los puntos un 8 en 4 ocasiones, o que la suma sea 7 en 5 ocasiones.

Probabilidad frecuencial

$$P(\text{suma } 8) = \frac{4}{25} = 0.16 = 16\%$$

$$P(\text{suma } 7) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0.20 = 20\%$$

Los posibles resultados de un par de dados son:

		Dado 1					
Dado 2							
		2	3	4	5	6	7
		3	4	5	6	7	8
		4	5	6	7	8	9
		5	6	7	8	9	10
		6	7	8	9	10	11
		7	8	9	10	11	12

Aquí podemos observar que existen 36 (6×6) diferentes combinaciones en total, el menos probable es el 2 y el 12, y el más probable el 7. Existen 6 combinaciones diferentes para obtener un 7, hay 5 para obtener un 6 o un 8, se tiene 4 para obtener un 5 o un 9, existen 3 combinaciones para tener un 4 o un 10, hay 2 para obtener un 3 o un 11 o una combinación para tener un 2 o un 12.

El experimento consiste en sacar una canica de una bolsa no transparente en 30 ocasiones, $N = 30$, la bolsa contiene cuatro canicas de diferentes colores y se registró los resultados.



Resultado	Cuantificación	Frecuencia
Negra		8
Blanca		7
Roja		5
Verde		10

Probabilidad frecuencial

$$P(\text{negra}) = \frac{8}{30} = 0.2667 = 26.67\%$$

$$P(\text{blanca}) = \frac{7}{30} = 0.2333 = 23.33\%$$

$$P(\text{roja}) = \frac{5}{30} = 0.1667 = 16.67\%$$

$$P(\text{verde}) = \frac{10}{30} = 0.3333 = 33.33\%$$

Probabilidad frecuencial, graficación e interpretación de resultados

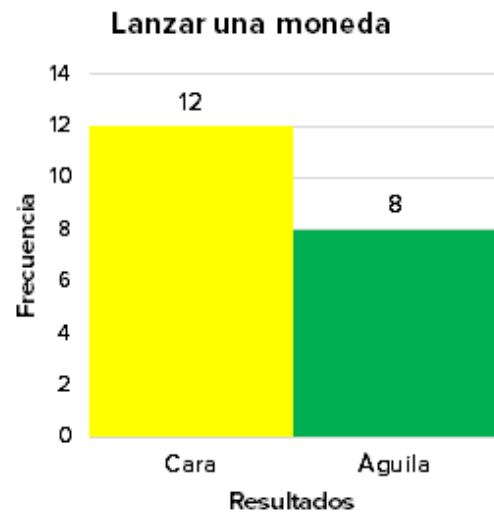
El **histograma** es una gráfica que permite identificar la acumulación, la tendencia, la variabilidad y la distribución de conjuntos de datos. Recordemos que este tipo de gráfica de barras no presenta espacios entre ellas.

Si lanzamos una moneda al aire en 20 ocasiones, $N = 20$, obtenemos los siguientes resultados y representación gráfica.

Resultados	Frecuencia
Cara	12
Águila	8

$$P(\text{cara}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.60 = 60\%$$

$$P(\text{águila}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.40 = 40\%$$



Observa cómo se grafica un experimento aleatorio con un dado.

Dado	
Resultados	Frecuencia
1	5
2	4
3	3
4	4
5	3
6	1

$$P(1) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(2) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0.20 = 20\%$$

$$P(3) = \frac{3}{20} = 0.15 = 15\%$$

$$P(4) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0.20 = 20\%$$

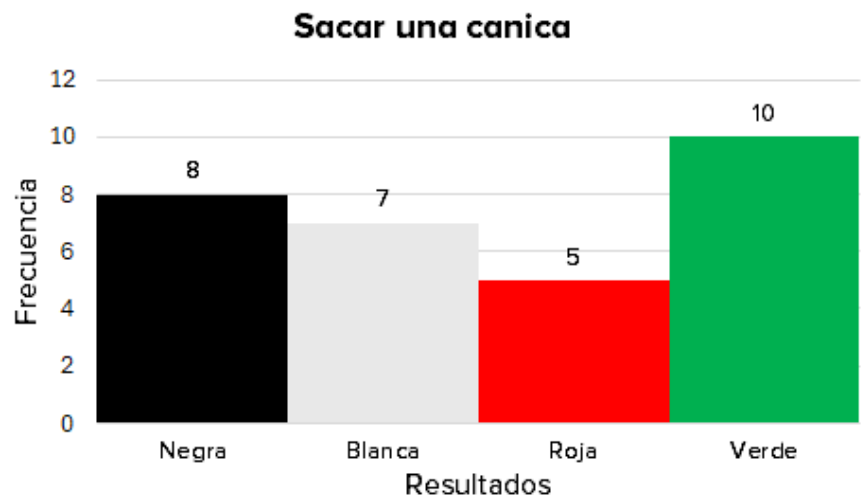
$$P(5) = \frac{3}{20} = 0.15 = 15\%$$

$$P(6) = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$$



Por último, se retoma el experimento que consistió en sacar de una bolsa no transparente una canica, registrar su color, volverla a introducir en la bolsa y repetir para ajustar un total de 30 veces.

Resultado	Frecuencia
Negra	8
Blanca	7
Roja	5
Verde	10



$$P(negra) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} = 0.2667 = 26.67\%$$

$$P(blanca) = \frac{7}{30} = 0.2333 = 23.33\%$$

$$P(roja) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 0.1667 = 16.67\%$$

$$P(verde) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0.333 = 33.33\%$$